ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 135 σχολικό.

Α2. Έστω οι συναρτήσεις $f\ ,g,h$. Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$ τότε:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

Α3. Δύο συναρτήσεις λέγονται ίσες όταν:

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Α4. **α.** Σωστό

β. Λάθος

γ. Σωστό

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Συνάρτηση $f\colon R \to R$

Ισχύει $f(x+1) = (x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in R$ (1)

Β1. Θέτω $\omega = x+1$, $x \in R\ ,\omega \in R \Leftrightarrow$

$$x = \omega - 1$$

Άρα, από (1) ισχύει $f(\omega) = \omega\cdot e^{1-\omega}$, $\omega \in R$

Δηλαδή $(\omega \leftrightarrow x)$ ισχύει $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in R$

B2. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο R με:

$$f'(x) = (x)' \cdot e^{1-x} + x \cdot (e^{1-x})' = e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' =$$

$$= e^{1-x} - x \cdot e^{1-x} = (1-x) \cdot \underbrace{e^{1-x}}_{>0} \ , \ x \in R$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		+	0	−	
f		↗	ΟΛ. ΜΕΓ $\boxed{f(1) = 1}$	↘	

Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και f γνήσια φθίνουσα στο $[1, +\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει στη θέση $x = 1$ (ολικό) μέγιστο το $f(1) = 1$.

B3. $f''(x) = \left((1-x) \cdot e^{1-x}\right)' =$

$$= (1-x)' \cdot e^{1-x} + (1-x) \cdot (e^{1-x})' =$$

$$= -e^{1-x} + (1-x) \cdot e^{1-x} \cdot (1-x)' =$$

$$= -e^{1-x} - (1-x) \cdot e^{1-x} = -e^{1-x} - e^{1-x} + x \cdot e^{1-x} =$$

$$= \underbrace{e^{1-x}}_{>0} \cdot (x-2) \ , \ x \in R$$

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		⌒	Σ. Κ $f(2)=\frac{2}{e}$	⌣	

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $[2, +\infty)$.

Το μοναδικό σημείο καμπής της C_f είναι το σημείο $M(2, f(2)) = \left(2, \frac{2}{e}\right)$ επειδή μόνο σε αυτό αλλάζει η κυρτότητα της f και υπάρχει η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_f , αφού f παραγωγίσιμη στο R.

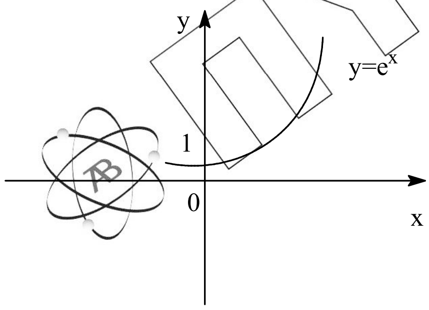
Κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f **δεν** υπάρχουν επειδή η f είναι συνεχής στο R (ως παραγωγίσιμη).

Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη **της C_f στο** $-\infty$ **.**

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{1-x} =$$

$$= \lim_{u\to+\infty} e^{u} = +\infty \notin R$$

$u=1-x$
$x \to -\infty$
$u \to +\infty$



Άρα δεν υπάρχει ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της $\boldsymbol{C_f}$ **στο** $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \cdot e^{1-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{1-x} =$

  $= \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0 \to \lambda = 0$

$u=1-x$
$x \to +\infty$
$u \to -\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \lambda \cdot x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x \cdot e^{1-x})$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(e^{x-1})'} \underset{D.L.H}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}\cdot(x-1)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0 \to \beta = 0$$

Άρα η ευθεία $y = \lambda \cdot x + \beta$, δηλαδή $y = 0$ (άξονας x'x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B4. I) Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 1]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και ↑ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το

$$f(A_1) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 1]$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x \cdot e^{1-x}) = \lim_{u\to+\infty} [(1-u)\cdot e^u] =$$

$$= (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

u=1-x

x=1-u

$x \to -\infty$, $u \to +\infty$

Στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$ η f είναι συνεχής και ↓ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το$f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = (0,1]$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1] \cup (0,1] = (-\infty, 1]$$

II) Πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, $x \in R$, $\lambda \in R$

<u>1η περίπτωση:</u> Αν $\lambda > 1$ τότε $\lambda \notin f(A)$, άρα η εξίσωση $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη στο R (καμία λύση).

2η περίπτωση: Αν $\lambda = 1$ τότε η εξίσωση $f(x) = \lambda, \Leftrightarrow f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$ επειδή $f(1) = 1$ και το $x = 1$ είναι η μοναδική θέση ολικού μεγίστου της f.

3η περίπτωση: Αν $0 < \lambda < 1$ τότε $\lambda \in f(A_1)$, $\lambda \in f(A_2)$ και αφού $f \uparrow$ στο διάστημα A_1 και $f \downarrow$ στο διάστημα A_2 ισχύει ότι η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει

- ακριβώς μια ρίζα $\rho_1 \in (-\infty, 1)$ και
- ακριβώς μια ρίζα $\rho_2 \in (1, +\infty)$

Είναι $\rho_1 \neq 1, \rho_2 \neq 1$ αφού $f(1) = 1$ και $0 < \lambda < 1$

Άρα στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1 , ρ_2 με $\rho_1 < 1 < \rho_2$.

4η περίπτωση: Αν $\lambda \leq 0$ τότε $\lambda \in f(A_1)$, $\lambda \notin f(A_2)$. Άρα στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει ακριβώς μια ρίζα ρ στο διάστημα $(-\infty, 1)$, αφού $f \uparrow$ στο A_1 και δεν έχει ριζα στο $A_2 = [1, +\infty)$.

Άρα στην περίπτωση αυτή η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει μία μόνο ρίζα ρ σε όλο το R και είναι ρ<1.

ΘΕΜΑ Γ

Συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x & , \quad 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

Πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0] \cup \left(0, \frac{3\pi}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ και $\alpha < -3$.

Γ1.

- Για $x < 0$ η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

- Για $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$ η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχής ως τριγωνομετρική.

- Στο $x_o = 0$ ισχύει:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1 \end{array}\right\} \text{άρα } \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$f(0) = a \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 0 + 1 = 1$

Επομένως ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, άρα η f είναι συνεχής και στο $x_o = 0$.

Άρα η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της $A = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(ax^3-3x^2-x+\cancel{1})-\cancel{1}}{x} =$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\cancel{x} \cdot (ax^2 - 3x - 1)}{\cancel{x}} = a \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 1 = -1$

και $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi - 1}{x} = 0$

Είναι $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα **δεν** υπάρχει το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$,
επομένως η f **δεν** είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$.

Γ2. Ι)

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$, αφού από **Γ.1** η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

- Στο διάστημα $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ η $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι παραγωγίσιμη με

  $f'(x) = (\sigma\upsilon\nu\chi)' = -\eta\mu x$

- $\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} = 0 \end{array}\right\}$ άρα $f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, άρα **δεν** ισχύει η 3η προϋπόθεση του Θ. Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$,

  δηλαδή δεν ισχύει $f(0) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.

ΙΙ) Λύνω την εξίσωση $f'(x) = 0$, $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$

$$-\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\eta\mu x = 0 \overset{0<x<\frac{3\pi}{2}}{\Longleftrightarrow}$$
$$x = \pi$$

Άρα το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ ώστε $f'(\xi) = 0$ είναι το $\xi = \pi$

Γ3. Είναι $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1 \ \ , \ \ x \in (-\infty, 0)$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 \ \ , \ \ \ x \in (-\infty, 0)$$

Αν υπάρχει σημείο $(x_0, f(x_0))$ της C_f με $x_0 < 0$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στον άξονα x'x, τότε θα ισχύει:

$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$3ax_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$ Αδύνατη στο R, αφού το τριώνυμο $3ax_0^2 - 6x_0 - 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot (-1) = 36 + 12\alpha = 12 \cdot (\alpha + 3) < 0$ (δίνεται $\alpha < -3$) άρα το τριώνυμο αυτό **δεν** έχει πραγματικές ρίζες.

Άρα δεν υπάρχουν στη C_f σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

Γ4. Στο διάστημα $A_1 = (-\infty, 0]$ η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$ είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0 \ \ , \ \ \forall x \in (-\infty, 0]$

(Το τριώνυμο της f έχει $\Delta < 0$ άρα είναι $\forall x \in (-\infty, 0]$ ομόσημο του 3α δηλαδή αρνητικό, αφού $\alpha < -3$).

Άρα $f \downarrow$ στο $A_1 = (-\infty, 0]$ άρα $\forall x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 1$

- $\forall x \in A_2 = \left(0, \frac{3\pi}{2}\right]$ είναι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x \in [-1,1)$

άρα $-1 \leq f(x) < 1 \ \ , \ \ \forall x \in A_2$

Επομένως ισχύει $f(x) \geq -1 \ \ , \ \ \forall x \in A_1 \cup A_2 = \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εξίσωση $lnx = \frac{1}{x} \Leftrightarrow lnx - \frac{1}{x} = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $K(x) = lnx - \frac{1}{x}$, $x\epsilon(0,+\infty)$ και αρκεί να δειχτεί ότι η εξίσωση $K(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (1,e)$.

<u>Θεώρημα Bolzano για $K(x)$ στο διάστημα $[1,e]$</u>

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο $[1,e]$ ως διαφορά των συνεχών lnx (λογαριθμική) και $\frac{1}{x}$ (ρητή).

- $\left.\begin{array}{l} K(1) = \overset{0}{ln1} - 1 = -1 < 0 \\ K(e) = lne - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \end{array}\right\} K(1)\cdot K(e) < 0$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,e)$ ώστε

$K(x_0) = 0 \Leftrightarrow lnx_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow lnx_0 = \frac{1}{x_0}$

Είναι $K'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} > 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$

Άρα $K(x) \uparrow$ στο $(0,+\infty)$, άρα το $x_0 \in (1,e)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $K(x) = 0$ σε όλο το $(0,+\infty)$.

Δ2. Συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$ με τύπο:

$$f(x) = (lnx_0)\cdot(x+1) - lnx - 1 \ , \ x \in (0,+\infty)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = lnx_0 \cdot (x+1)' - (lnx)' - (1)' =$$

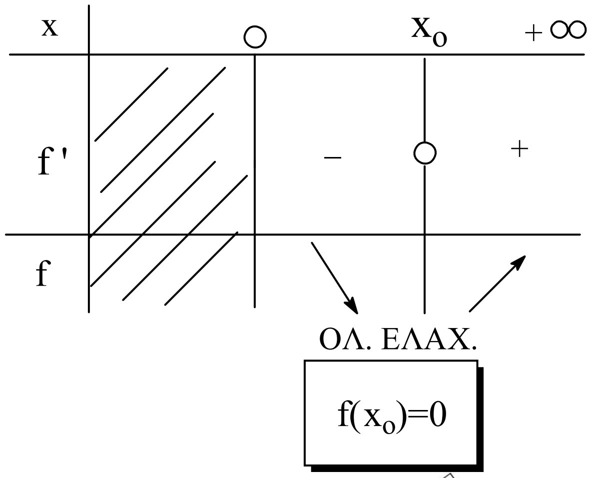
$$= lnx_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x-x_0}{x\cdot x_0}$$ (από **Δ1.** $lnx_0 = \frac{1}{x_0}$)

Οπότε: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$

Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{x-x_0}{x \cdot x_0} > 0 \Leftrightarrow$

$x > x_0$



Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $(0, x_0]$ και γνήσια αύξουσα στο διάστημα $[x_0, +\infty)$. Άρα η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση x_0

το $f(x_0) = lnx_0 \cdot (x_0 + 1) - lnx_0 - 1 =$

$= x_0 \cdot lnx_0 + \cancel{lnx_0} - \cancel{lnx_0} - 1 = \cancel{x_0} \cdot \frac{1}{\cancel{x_0}} - 1 = 0$

αφού $lnx_0 = \frac{1}{x_0}$

Δ3.

Εξίσωση $g(x) = h(x)$, $x > 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$,$x > 0 \Leftrightarrow$

$\ln(x \cdot e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow$

$lnx + lne^{-x} = (x+1) \cdot ln\left(\frac{x_0}{e}\right) \Leftrightarrow$

$lnx - x = (x+1) \cdot (lnx_0 - lne) \Leftrightarrow$

$lnx - x = (x+1) \cdot (lnx_0 - 1) \Leftrightarrow$

$lnx - \cancel{x} = (lnx_0) \cdot (x+1) - \cancel{x} - 1 \Leftrightarrow$

$lnx_0 \cdot (x+1) - lnx - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$f(x) = 0$

$x_0(1, e)$

$h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} > 0, \forall x \in R$

άρα από $g(x) = h(x)$

είναι $g(x) > 0 \Leftrightarrow$

$x \cdot e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα το x_0

Επειδή $f(x_0)=0$ και x_0 η μοναδική θέση ολικού ελαχίστου της f.

Επομένως το x_0 είναι η **μοναδική** ρίζα της εξίσωσης $g(x)=h(x)$, δηλ. οι C_g, C_h έχουν μόνο ένα κοινό σημείο, το οποίο έχει τετμημένη x_0.

Είναι $g'(x)=(x)'\cdot e^{-x}+x\cdot(e^{-x})'=e^{-x}+x\cdot e^{-x}\cdot(-x)'=$

$=e^{-x}-xe^{-x}=(1-x)\cdot e^{-x}\ ,\ x\in R$

$h'(x)=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot ln\frac{x_0}{e}\cdot(x+1)'=$

$=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot(lnx_0-lne)\cdot 1=$

$=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}\cdot(lnx_0-1)\ ,\ x\in R$

Αφού ισχύει $g(x_0)=h(x_0)\Leftrightarrow {x_0}^{e^{-x_0}}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$ (1) , για να έχουν οι C_g, C_h κοινή εφαπτομένη στο μοναδικό τους κοινό σημείο, αρκεί να δείξω ακόμα ότι ισχύει:

$g'(x_0)=h'(x_0)\Leftrightarrow$

$(1-x_0)\cdot e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\cdot(lnx_0-1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$(1-x_0)\cdot \cancel{e^{-x_0}}=x_0\, \cancel{e^{-x_0}}(\ell nx_0-1)\Leftrightarrow$

$1-\cancel{x_0}=x_0\,\ell nx_0-\cancel{x_0}\Leftrightarrow$

$x_0\,\ell nx_0-1=0$ που ισχύει από **Δ1**.

Άρα ισχύει $\begin{cases} g(x_0)=h(x_0) \\ \quad\quad \kappa\alpha\iota \\ g'(x_0)=h'(x_0) \end{cases}$

Άρα οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο μοναδικό τους κοινό σημείο με τετμημένη x_0 .

Δ4. Συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \to R$ συνεχής με $f(x) > \varphi(x)$, $\forall x > 0$.
Θεωρούμε τα σημεία $A\big(x, f(x)\big)$, $B(x, \varphi(x))$ των C_f , C_φ αντίστοιχα και $x > 0$.
Η απόσταση των σημείων A, B δίνεται από τη συνάρτηση:

$$d(x) = (AB) = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = \sqrt{(f(x) - \varphi(x))^2} =$$

$$= |f(x) - \varphi(x)| \underset{\substack{\downarrow \\ f(x) > \varphi(x) \\ \forall x > 0}}{=} f(x) - \varphi(x) \ , \quad x \in (0, +\infty)$$

Δίνεται ότι η συνάρτηση $d(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση x_0. Τότε:

- Αν η $\varphi(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε αφού και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 είναι και η $d(x) = f(x) - \varphi(x)$ παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0)$$

Και αφού x_0 εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$, ισχύει από Θ. Fermat ότι

$$d'(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 0 - \varphi'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

- Αν η $\varphi(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , έχουμε όμως φ συνεχής στο x_0, *τότε το* x_0 είναι πάλι κρίσιμο σημείο της φ.

Συμπέρασμα: σε κάθε περίπτωση το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΥ ΓΕΩΡΓΙΑ