ΠΑΛΑΙΟ

ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Θεωρήματος σελ. 111 στο σχολικό

Α2. Ορισμός σελ. 104 στο σχολικό

Α3. Διατύπωση Θεωρήματος Bolzano σελ. 74 στο σχολικό

Α4. α) Ψευδής

β) Για τη συνάρτηση $f(x) = x$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$

ενώ το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ,

επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Α5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-3} \quad , \quad x \in R - \{3\}$$

Β1. Για κάθε $x_1 , x_2 \in A = R - \{3\}$ με

$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow$

$\dfrac{3x_1 + 1}{x_1 - 3} = \dfrac{3x_2 + 1}{x_2 - 3} \Longrightarrow$

$(3x_1 + 1)\,(x_2 - 3) = (3x_2 + 1)\,(x_1 - 3) \Longrightarrow$

$3\cancel{x_1}x_2 - 9x_1 + x_2 \cancel{-3} = 3\cancel{x_1}x_2 - 9x_2 + x_1 \cancel{-3} \Longrightarrow$

$-10x_1 = -10x_2 \Longrightarrow$

$x_1 = x_2$

Άρα η f είναι $1-1$, άρα η f αντιστρέφεται, δηλαδή ορίζεται η συνάρτηση $f^{-1} : \ f(A) \to A$

Β2. Έστω $y = f(x) \Longleftrightarrow$

$y = \dfrac{3x+1}{x-3} \Longleftrightarrow$

$y(x-3) = 3x + 1 \Longleftrightarrow$

$yx - 3y = 3x + 1 \Longleftrightarrow$

$yx - 3x = 3y + 1 \Longleftrightarrow$

$(y-3)\cdot x = 3y + 1 \quad (1)$

- Αν $y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = 3$ τότε $(1) \Leftrightarrow 0 \cdot x = 10$ Αδύνατη
- Αν $y - 3 \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 3$ τότε $(1) \Leftrightarrow x = \frac{3y+1}{y-3}$

Άρα $f(A) = R - \{3\}$ είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1}

και $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{y-3} \quad , \quad y \in R - \{3\}$

δηλαδή, $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3} \quad , \quad x \in R - \{3\}$

Οι συναρτήσεις f , f^{-1} είναι ίσες επειδή έχουν :

- Ίδιο πεδίο ορισμού το $A = R - \{3\}$

και

- Ισχύει $f(x) = f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$, $\forall x \in A = R - \{3\}$

B3. $\forall x \in R - \{3\}$ ισχύει $f^{-1}\big(f(x)\big) = x \overset{f^{-1}=f}{\Longleftrightarrow}$

$$f\big(f(x)\big) = x \Leftrightarrow$$

$$(fof)(x) = x$$

B4. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left(\frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) =$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{x-3} \cdot \left((3x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right) \right] = -\frac{3}{10} \cdot 0 = 0$$

Αφού $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-\frac{1}{3} - 3} = \frac{1}{-\frac{1}{3} - \frac{9}{3}} = \frac{\frac{1}{1}}{-\frac{10}{3}} = -\frac{3}{10}$

και $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \left[(3x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right] = 0$ επειδή

$\forall x \neq \frac{-1}{3}$ ισχύει $\left| (3x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| = |3x+1| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq$

$$\leq |3x+1| \cdot 1 = |3x+1|$$

Άρα $\left| (3x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |3x+1| \Leftrightarrow$

$$-|3x+1| \leq (3x+1) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} \leq |3x+1|$$

Όπου $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} |3x+1| = \left| 3 \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) + 1 \right| = |-1+1| = 0$

και $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{3}} \big(-(|3x+1|) \big) = 0$

άρα από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει:

$$\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \left[(3x+1)\cdot\ \eta\mu\frac{1}{3x+1}\right] = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\eta\mu\theta = \frac{\alpha\pi\acute{\varepsilon}\nu\alpha\nu\tau\iota\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\pi\rho o\sigma\kappa\varepsilon\acute{\iota}\mu\varepsilon\nu\eta\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau\eta}{\upsilon\pi o\tau\varepsilon\acute{\iota}\nu o\upsilon\sigma\alpha}$

$\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB}$

$\eta\mu\theta = \frac{BM}{1}$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{1}$

$\eta\mu\theta = BM$ $\qquad$ $\sigma\upsilon\nu\theta = OM$

Άρα $B\Gamma = 2BM = 2\eta\mu\theta$ $\qquad$ Άρα $AM = AO + OM = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$E(\theta) = \frac{B\Gamma\cdot AM}{2} = \frac{\cancel{2}\cdot\eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)}{\cancel{2}} = \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\ , \quad \theta\in(0\,,\pi)$$

Γ2. Η συνάρτηση Ε(θ) είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα $(0\,,\pi)$ με

$$E'(\theta) = (\eta\mu\theta)'(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(1+\sigma\upsilon\nu\theta)' =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta) + \eta\mu\theta(-\eta\mu\theta) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - (1-\sigma\upsilon\nu^2\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 \quad , \quad \theta\in(0\,,\pi)$$

$$E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 0$$

Θέτω $\omega = \sigma\upsilon\nu\theta$ $\;$, $\;\theta\in(0\,,\pi)$ $\;$ άρα $\;-1 < \sigma\upsilon\nu\theta < 1 \Leftrightarrow -1 < \omega < 1$

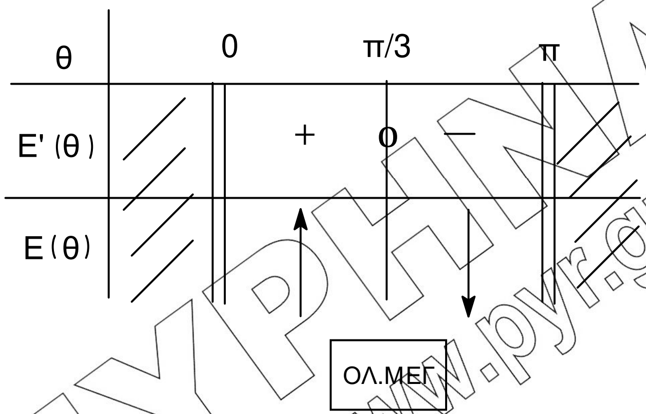
Άρα $2\omega^2 + \omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = \begin{cases} \frac{1}{2} & \quad\quad \textit{Δεκτό} \\ -1 & \quad\quad \textit{Απορρίπτεται} \end{cases}$

Άρα $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \overset{\theta \in (0\,,\pi)}{\Longleftrightarrow} \theta = \frac{\pi}{3}$

και $2\omega^2 + \omega - 1 > 0 \Leftrightarrow \omega \cancel{<} -1$ ή $\omega > \frac{1}{2}$

δηλαδή $E'(\theta) > 0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 > 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3}$

Η συνάρτηση $E'(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0\,, \frac{\pi}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{\pi}{3}, \pi)$



Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,\ \frac{\pi}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[\frac{\pi}{3}\ ,\ \pi)$

Άρα η $E(\theta)$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\theta = \frac{\pi}{3}$

Γ3.

- Στο διάστημα $A_1 = (0, \frac{\Pi}{3}]$ η $E(\theta)$ είναι συνεχής και ↑ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το :

$$E(A_1) = (\lim_{\theta \to 0^+} E(\theta)\,,\ E\left(\frac{\pi}{3}\right)] = (0, \frac{3\sqrt{3}}{4}]$$

Όπου: $\lim\limits_{\theta \to 0^+} E(\theta) = \lim\limits_{\theta \to 0^+}[(1 + \sigma\upsilon\nu\theta) \cdot \eta\mu\theta] = (1 + \sigma\upsilon\nu 0) \cdot \eta\mu 0$

$= (1+1)\cdot 0 = 0$

και $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(1 + συν\frac{\pi}{3}\right)\cdot ημ\frac{\pi}{3} = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

- Στο διάστημα $A_2 = [\frac{\pi}{3}, \pi)$ η $E(\theta)$ είναι συνεχής και ↓ άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το :

$$E(A_2) = (\lim_{\theta\to\pi^-} E(\theta)\ ,\ E\left(\frac{\pi}{3}\right)] = (0\ ,\frac{3\sqrt{3}}{4}]$$

όπου $\lim_{\theta\to\pi^-} E(\theta) = \lim_{\theta\to\pi^-} [(1+συν\theta)\cdot ημ\theta] = (1+συν\pi)\cdot ημ\pi =$

$= (1-1)\cdot 0 = 0$

Αφού $\frac{3}{4} \in E(A_1)$, $\frac{3}{4} \in E(A_2)$ και $E(\theta)$ είναι γνήσια μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1 , A_2, ισχύει ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\theta_1 \in \left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $E(\theta_1) = \frac{3}{4}$ και ακριβώς ένα $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ ώστε $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$

Είναι $\theta_1 \neq \frac{\pi}{3}$ και $\theta_2 \neq \frac{\pi}{3}$ αφού $E\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \frac{3}{4}$

Άρα υπάρχουν ακριβώς δύο ίδιες γωνίες θ_1, θ_2 με $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{3} < \theta_2 < \pi$ για τις οποίες το εμβαδόν Ε(θ) του τριγώνου $ΑΒΓ$ ισούται με $\frac{3}{4}$

Γ4. Θ.Μ.Τ για $E(\theta)$ στο διάστημα $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right] \subseteq (0, \frac{\pi}{3}]$

Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ ώστε $E'(\xi_1) = \dfrac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right)\cdot E'(\xi_1) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{4}$ (1)

Θ.Μ.Τ για $\boldsymbol{E(\theta)}$ στο $\boldsymbol{\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right] \subseteq [\frac{\pi}{3},\pi)}$

Η συνάρτηση $E(\theta)$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\left[\frac{\pi}{3},\ \theta_2\right]$ άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3},\ \theta_2\right)$ ώστε $E'(\theta_2) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_2)}{\frac{\pi}{3} - \theta_2} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\theta_2) = E\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{4}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,\pi)$ ώστε

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \cdot E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \cdot E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $f(x) = x \cdot lnx - \ln(\lambda x)$, $x > 0$, $\lambda > 0$ είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = (x)' \cdot lnx + x(lnx)' - (\ln(\lambda x))' =$$

$$= lnx + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - \frac{1}{\lambda x} \cdot (\lambda x)' =$$

$$= lnx + 1 - \frac{1}{\cancel{\lambda} x} \cdot \cancel{\lambda} = lnx + 1 - \frac{1}{x} \quad , \ x > 0$$

Το $x = 1$ είναι προφανής ρίζα της εξίσωσης

$$f'(x) = 0 \quad (f'(1) = \overset{0}{ln1} + 1 - 1 = 0)$$

$$f''(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} > 0 \ , \ \ \forall x \in (0,+\infty) \text{ άρα } f' \uparrow \text{ στο } (0,+\infty)$$

Άρα το $x = 1$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f'(x) = 0$

Λύνω την ανίσωση $f'(x) > 0 \Leftrightarrow$

$f'(x) > f'(1) \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x > 1$

x	0	1	+∞
f		— 0	+
f '		↘	↗

ΟΛ.ΕΛ

$\boxed{f(1) = -\ln\lambda}$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty]$. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$

το $f_{min} = f(1) = ln1 - ln\lambda = -ln\lambda$

Το σημείο του ακρότατου της f είναι το $(x, y) = (1, -ln\lambda)$, $\lambda \in (0, +\infty)$

Άρα $\begin{cases} x = 1 \\ y = -ln\lambda\,, \quad \lambda > 0 \end{cases}$ $\quad ,\acute{\alpha}\rho\alpha \quad y \in R.$

Άρα έχουμε το σημείο $(1, y)$, $y \in R$.

Επομένως, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$,το σημείο $(x, y) = (1, -ln\lambda)$ κινείται στην κατακόρυφη ευθεία $x = 1$

Δ2. Για να ισχύει $x^x \geq \lambda x \quad , \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad , \lambda > 0 \Leftrightarrow$

$$ln(x^x) \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow$$

$$xlnx - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Πρέπει ισοδύναμα να ισχύει $f_{min} \geq 0 \Leftrightarrow -ln\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$$ln\lambda \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$ln\lambda \leq ln1 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \leq 1$$

Άρα η μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ είναι το $\lambda = 1$

Στα ερωτήματα Δ3, Δ4 είναι $\boldsymbol{\lambda = 1}$

Δ3. Η συνάρτηση $g(x) = x^x = e^{x \cdot lnx} \quad , \quad x \in (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη

στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = e^{x \cdot lnx} \cdot (x \cdot lnx)' = x^x \cdot ((x)' \cdot lnx + x \cdot (lnx)') =$$

$$= x^x \cdot \left(lnx + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\right) = x^x \cdot (lnx + 1) \quad , \quad x \in (0, +\infty)$$

Το σημείο $0(0,0)$ δεν ανήκει στη C_g αφού $O \notin Ag = (0, +\infty)$

Η εφαπτομένη της C_g σε σημείο της $(x_0 \, , g(x_0))$ με $x_0 > 0$ έχει εξίσωση

$$y - g(x_0) = g'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή για να διέρχεται από το $0(0,0)$ πρέπει από (1) να ισχύει

$$0-g(x_0)=g'(x_0)\cdot(0-x_0)\Leftrightarrow$$

$$g(x_0)=g'(x_0)\cdot x_0\Leftrightarrow {x_0}^{x_0}={x_0}^{x_0}(lnx_0+1)\cdot x_0 \overset{:{x_0}^{x_0}>0}{\Longleftrightarrow}$$

$$1=(lnx_0+1)\cdot x_0 \overset{:x_0>0}{\Longleftrightarrow} lnx_0+1=\frac{1}{x_0}\Leftrightarrow$$

$$lnx_0+1-\frac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow f'(x_0)=0\overset{\Delta 1.}{\Leftrightarrow} x_0=1$$

Άρα από (1) η εξίσωση της μοναδικής εφαπτομένης της C_g που διέρχεται από το $0(0,0)$ είναι $y-g(1)=g'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$$y-1=1\cdot(x-1)\Leftrightarrow$$

$$y=x$$

Δ4. Συνάρτηση $h(x)=\begin{cases}x^x & , \quad x>0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$ $\quad$ $\delta\eta\lambda.\ h(x)=\begin{cases}g(x) & , \quad x>0\\ 1 & , \quad x=0\end{cases}$

Πεδίο ορισμού $A=[0,+\infty)$

i)

- Για $x>0$ η συνάρτηση $h(x)=x^x=g(x)$ είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη)

- Στο $x_0=0$ είναι $h(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^x=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot lnx}=$

$$=\lim_{u\to 0} e^u=e^0=1$$

$$u=x\cdot lnx$$

$$\lim_{x\to 0^+}(x\cdot lnx)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{lnx}{\frac{1}{x}}\ \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-x^2}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Επομένως, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=h(0)$, άρα η h είναι συνεχής και στο $x_0=0$,άρα η h είναι συνεχής σε όλο το $[0,+\infty)$.

ii) $\int_0^1 h(1-t)\,dt = -\int_1^0 h(u)\,du = \int_0^1 h(u)\,du$

$u = 1-t$

$t = 1-u$

$dt = -du$

Για $t=0$ είναι $u=1$

Για $t=1$ είναι $u=0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^{2020}\cdot\left[3-2\int_1^2 g(t)\,dt\right] + (1-x)\int_0^1 h(1-t)\,dt =$

$= x^{2020}\cdot\left[3-2\int_1^2 g(t)dt\right] + (1-x)\cdot\int_0^1 h(u)\,du \quad , \quad x\in[0,1]$

κι αρκεί να δειχτεί ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$

- Η $\varphi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις των συνεχών x^{2020} , $1-x$ (πολυωνυμικές) και $3-2\int_1^2 g(t)dt$, $\int_0^1 h(u)\,du$ (σταθερές)
- $\varphi(0) = \int_0^1 h(u)du > 0$ αφού $h(u)>0$, $\forall x\in[0,1]$ με h συνεχής στο $[0,1]$,

  άρα $\int_0^1 h(u)du > 0$
- $\varphi(1) = 3-2\int_1^2 g(t)dt < 0$ αφού από **Δ2.** ισχύει (εφόσον $\lambda=1$)

  ότι $x^x \geq x$, $\forall x\in[1,2] \Leftrightarrow$

  $\ln(x^x)\geq lnx \Leftrightarrow x\cdot lnx - lnx \geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$, όπου το $=$ ισχύει μόνο για $x=1$ (η μοναδική θέση ολ. ελαχίστου της f). Αφού είναι x^x, x συνεχείς στο $[1,2]$ (ως παραγωγίσιμες) ισχύει ότι :

$$\int_1^2 x^x\,dx > \int_1^2 x\,dx \Rightarrow \int_1^2 g(t)\,dt > \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \Rightarrow$$

$$\int_1^2 g(t)\,dt > 2 - \frac{1}{2} \Rightarrow \int_1^2 g(t)dt > \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$2\int_1^2 g(t)dt > 3 \Rightarrow 3 - 2\int_1^2 g(t)dt < 0$$

Άρα $\varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$, επομένως από Θεώρημα Bolzano υπάρχει στο διάστημα $(0,1)$ τουλάχιστον μία ρίζα για την εξίσωση $\varphi(x) = 0$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ