ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## Θέμα Α

$A_1 \to \beta$ , $A_2 \to \gamma$ , $A_3 \to \alpha$ , $A_4 \to \gamma$

$A_5 \to$ Λ , Σ , Λ , Σ , Σ

## Θέμα Β

$B_1 \to$ Σωστό το (ii)

$$f_1 = \frac{v_H}{v_H + v_s} f_s = \frac{v_H}{v_H + \frac{v_H}{20}} f_s = \frac{v_H}{\frac{21}{20} v_H} f_s \quad \acute{\eta} \quad \boxed{f_1 = \frac{20}{21} \cdot f_s}$$

Κρούση: $m \cdot v_s = 2m \cdot V_s$ ή $V_s = \frac{v_s}{2} = \frac{v_H}{40}$

$$f_2 = \frac{v_H}{v_H + V_s} f_s = \frac{v_H}{v_H + \frac{v_H}{40}} f_s = \frac{v_H}{\frac{41}{40} v_H} f_s \quad \acute{\eta} \quad \boxed{f_2 = \frac{40}{41} f_s}$$

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{20}{21} f_s}{\frac{40}{41} f_s} \quad \acute{\eta} \quad \boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{41}{42}}$$

$B_2 \rightarrow$ Σωστό το (iii)

Bernoulli $_{1\to 2}$: $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ και εξ συνέχειας $\Pi_1 = \Pi_2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2$ ή

$2A_2 v_1 = A_2 v_2$ ή

$v_2 = 2v_1$ ή

$v_1 = \frac{v_2}{2}$

$$P_{atm} + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \frac{v_2^2}{4} = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$gh = \frac{v_2^2}{2}\cdot\frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad v_2^2 = \frac{8}{3} g h \quad (1)$$

Bernoulli $_{\text{ελεύθερη επιφάνεια} \to 3}$ : $P_{atm} + \rho g H = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_3^2$

$$v_3^2 = 2gH \quad (2)$$

και αφού η στάθμη στο δοχείο σταθεροποιείται σε ύψος $H$ ισχύει ότι $\Pi_{εισ} = \Pi_{εκρ}$ ή

$\Pi_2 = \Pi_3$ ή $A_2 v_2 = A_3 v_3$ ή $A_2 v_2 = \frac{A_2}{2} v_3$ ή $v_3 = 2v_2$ (3)

από (1), (2), (3) έχουμε:

$$\cancel{4}^{2}\cdot\frac{8}{3} g h = \cancel{2} g H \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{h}{H} = \frac{3}{16}}$$

$B_3 \rightarrow$ Σωστό (ii)

Η ράβδος βρίσκεται σε <u>οριζόντιο</u> επίπεδο άρα

$\Delta K = W_{ολ} \rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_F$ ή $\frac{1}{2} I \omega^2 = F \cdot \ell \cdot \frac{\pi}{2}$ ή

$\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{3} M\ell^{\cancel{2}} \cdot \omega^2 = F \ell \frac{\pi}{\cancel{2}}$ ή $\frac{1}{3} M \cdot \ell \omega^2 = F \pi$ ή $\frac{1}{3} 3 \cdot 1 \omega^2 = 9\pi^2$ ή

$\omega = \sqrt{9\pi^2}$ ή $\omega = 3\pi$ rad/s

Μετά την κρούση: $I' = I + m\ell^2 = \frac{1}{3} M\ell^2 + m\ell^2 = \frac{1}{3} 3 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1^2$

ή $I' = 2 kg \cdot m^2$

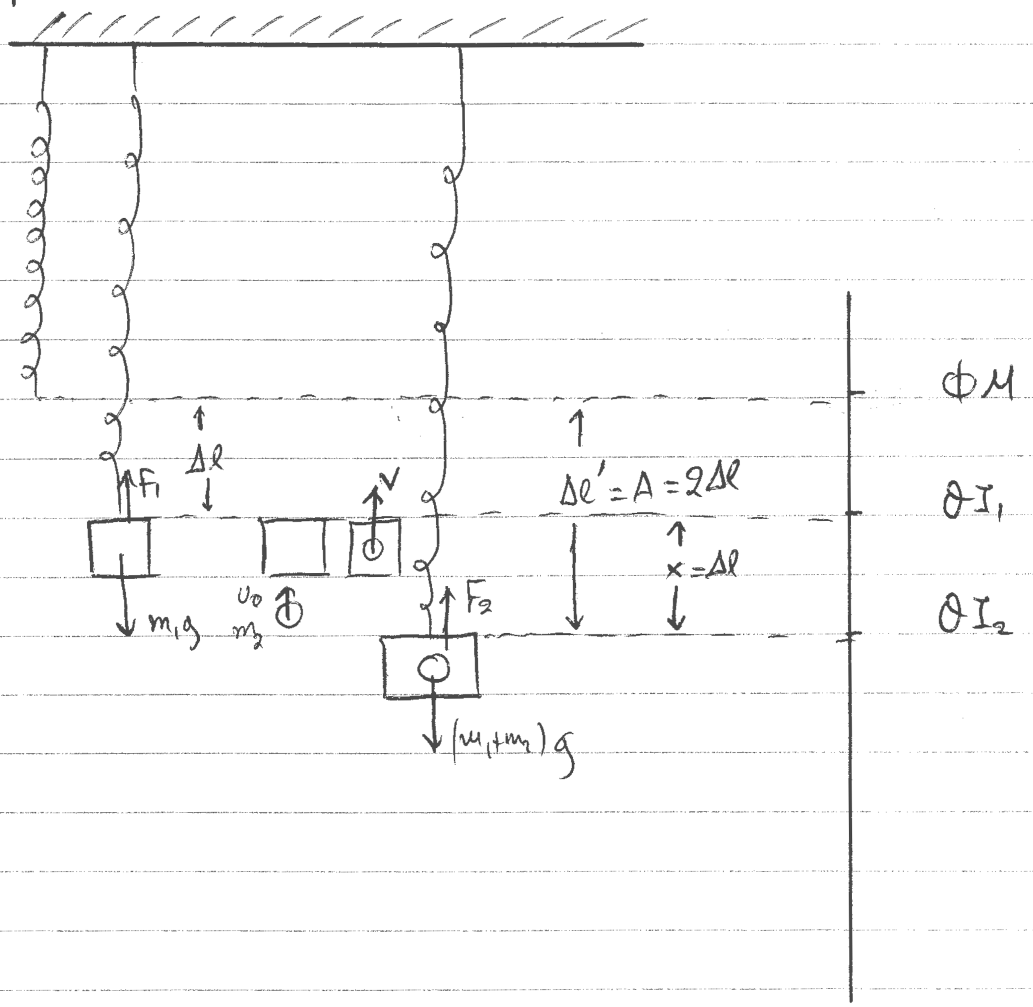
$\omega' = \frac{\omega}{2}$ άρα $\theta = \frac{\omega}{2} t$ ή $t = \frac{\theta}{\frac{\omega}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}$ ή $\boxed{t = \frac{1}{3} s}$

Αφού από αρχή Διατήρησης στροφορμής έχουμε $(\Sigma \vec{\tau}_{εξ} = 0)$

$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ}$ ή $I \cdot \omega = I' \cdot \omega'$ ή $1 \cdot \omega = 2\omega'$

ή $\omega' = \frac{\omega}{2}$

## Θέμα Γ




**Γ1|** Στη Θ.Ι$_1$ ισχύει $\Sigma F = 0$ ή $F_1 = m_1 g$ ή $k \cdot \Delta l = m_1 g$ ή

$$k = \frac{m_1 g}{\Delta l} \text{ ή } k = \frac{1 \cdot 10}{0,05} \text{ ή } \underline{\underline{k = 200\,N/m}}$$

Αφού το σώμα $m_2$ έχει ίση μάζα με το σώμα $m_1$ η Θ.Ι$_2$ μετατοπίζεται άλλο τόσο προς τα κάτω άρα

$\Delta l' = 2 \cdot \Delta l$ και αφού το συσσωμάτωμα σταματά στη θέση φυσικού μήκους ισχύει ότι $A = \Delta l' = 2 \cdot \Delta l$ ή $\underline{A = 0,1\,m}$

Από Αρχή διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης έχουμε:

$$E = K + U_{ταλ} \text{ ή } \frac{1}{2} D A^2 = \frac{1}{2}(m_1+m_2)V^2 + \frac{1}{2} D x^2$$

$k\cdot A^2 = 2mV^2 + k\,\Delta l^2$

$2mV^2 = kA^2 - k\left(\frac{A}{2}\right)^2$ ή $V^2 = \frac{kA^2}{2m}\left(1-\frac{1}{4}\right)$ ή

$V^2 = \frac{200}{2\cdot 1}\cdot\frac{0,1^2}{4}\cdot 3$ ή $V = \frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s$

και από αρχή διατήρησης ορμής $\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ}$ $\uparrow(+)$ ή

$m_2 v_0 = (m_1+m_2)\cdot V$ ή $v_0 = 2\cdot V$ ή $v_0 = \sqrt{3}\ m/s$

άρα η κινητική ενέργεια του $Σ_2$ πριν τη κρούση είναι.

$K_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot v_0^2$ ή $K_2 = \frac{1}{2}\, 1\, (\sqrt{3})^2$ ή $K_2 = \frac{3}{2} = 1,5\ J$.

**Γ3** $\Delta\vec{P}_2 = \vec{P}_2' - \vec{P}_2$ ή $|\Delta P_2| = |m_2\cdot V - m_2 v_0|$ ή $|\Delta P_2| = |m_2(V - v_0)|$

ή $\Delta P_2 = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right|$ ή $|\Delta P_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}\ kg\cdot m/s$ με φορά προς τα <u>κάτω</u>

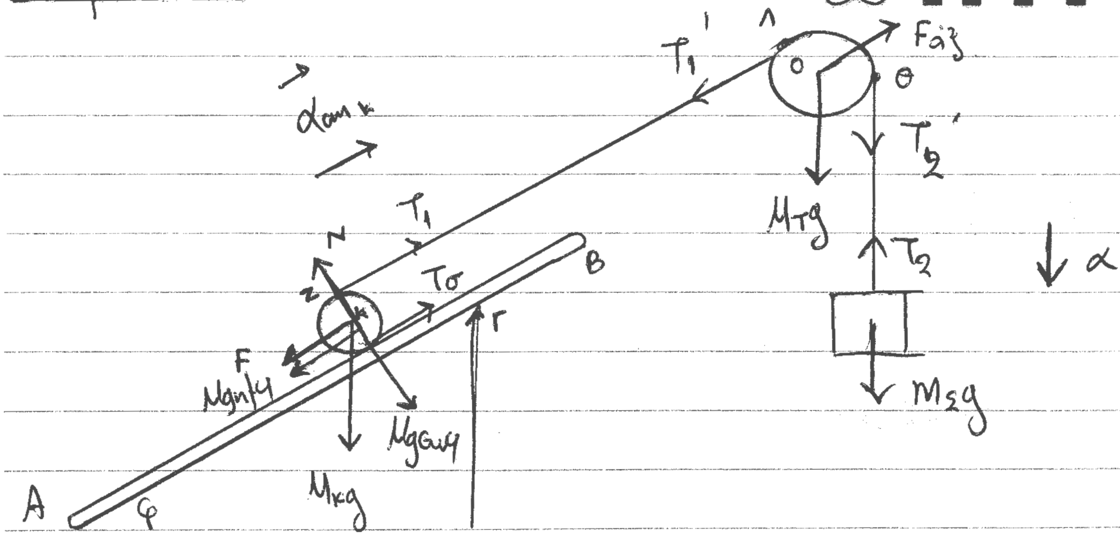
**Γ4** Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το συσσωμάτωμα βρίσκεται στη θέση $x_0 = +\frac{A}{2}$ με ταχύτητα θετική άρα

$x_0 = Aημ(ωt+φ_0) \xrightarrow{t=0} \frac{A}{2} = Aημφ_0$ ή $ημφ_0 = \frac{1}{2}$ ή $φ_0 = \frac{π}{6}\ rad$

$ω = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{200}{2}}$ ή $ω = 10\ r/s$ άρα

$$\boxed{x = 0,1\,ημ\left(10t + \frac{π}{6}\right)}$$

## Θέμα Δ




**Δ.1** Αφού το σύστημα ισορροπεί έχουμε

$T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$ } ως τάσεις στο ίδιο μη εκτατό σχοινί

• Κύλινδρος · $\Sigma\vec{F} = 0$ → $\Sigma F_x = 0$ ή $F + Mgημφ = T_1 + T_σ$ (1)
→ $\Sigma F_y = 0$ ή $N = Mgσυνφ$ (2)

· $\Sigma\vec{\tau}_κ = 0$ $\quad T_1 R_κ = T_σ \cdot R_κ$ ή $T_1 = T_σ$ (3)

• Τροχαλία · $\Sigma\vec{\tau}_O = 0$ $\quad T_2' \cdot R_T = T_1' \cdot R_T$ ή $T_1 = T_2$ (4)

• Σώμα Σ : $\Sigma\vec{F} = 0$ ή $T_2 = m_Σ g$ (5)

από (5) → $T_2 = 20N$
(4) → $T_1 = T_2 = 20\,N$
(3) → $T_σ = 20N$

(1) → $F + 2 \cdot 10 \frac{1}{2} = 20 + 20$ ή $F = 40 - 10$ ή $F = 30N$

**Δ2** Αφού ο κύλινδρος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση θα είναι $v_{cm,k} = \omega \cdot R_k$ και

$a_{cm,k} = a_{\gamma_k} \cdot R_k$ και $a_{επ,Z} = 2 \cdot a_{cm,k}$

Όπως επίσης και $a_{επ,Z} = a_{επ,Λ} = a_{επ,Θ} = a_{\gamma_{τροχ}} \cdot R_T = a$
ως σημεία του ίδιου σχοινιού.

άρα • Για το σώμα Σ: $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ή $m_\Sigma g - T_2 = m_\Sigma a$

ή $T_2 = m_\Sigma g - m_\Sigma a$ (1)

• Για την τροχαλία: $\Sigma \vec{\tau}_{(O)} = I_T \cdot \vec{a}_{\gamma_T}$ ή

$(T_2 - T_1) \cdot R_T = \frac{1}{2} m_T \cdot R_T^2 \cdot a_{\gamma_T}$ ή

$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_T \cdot a$ (2)

• Για τον κύλινδρο: $\Sigma \vec{F}_x = m_k \cdot \vec{a}_{cm,k}$ ή

$T_1 + T_\sigma - M_k g ημφ = M_k \cdot a_{cm,k}$ (3)

$\Sigma \vec{\tau}_{(k)} = I_k \cdot \vec{a}_{\gamma_k}$ ή $(T_1 - T_\sigma) R_k = \frac{1}{2} M_k \cdot a_{\gamma_k} R_k^2$ ή

$T_1 - T_\sigma = \frac{1}{2} M_k a_{cm,k}$ (4)

πρόσθεση κατά μέλη (3)+(4) άρα έχουμε:

$2T_1 - M_k g ημφ = \frac{3}{2} M_k \cdot a_{cm,k}$ ή

$T_1 = \frac{M_k g ημφ}{2} + \frac{3}{4} M_k \cdot \frac{a}{2}$ (5)

αρα έχουμε:

$$(2) \xrightarrow[(1)]{(5)} \quad m_\Sigma g - m_\Sigma \alpha - \frac{M_K g\eta\mu\varphi}{2} - \frac{3}{8} M_K \alpha = \frac{1}{2} m_T \cdot \alpha$$

Όμως $m_\Sigma = m_K = m_T = 2kg$ αρα με αντικατάσταση έχω:

$$10 - \alpha - \frac{10}{4} - \frac{3}{8}\alpha = \frac{1}{2}\alpha \quad \acute{\eta}$$

$$10 - \frac{10}{4} = \alpha\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right) \quad \acute{\eta}$$

$$\frac{15}{8}\alpha = \frac{30}{4} \quad \acute{\eta} \quad \alpha = 4m/s^2 \quad \text{αρα}$$

$$\alpha_{cm,K} = \frac{\alpha}{2} = 2m/s^2.$$

**Δ3)** Ο κύλινδρος από τη χρονική στιγμή $t=0$ έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,5s$ εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση ανερχόμενος στο κεκλιμένο επίπεδο χωρίς αρχική ταχύτητα.

αρα $\upsilon_1 = \alpha_{cm,K} t_1$ ή $\upsilon_1 = 2 \cdot 0,5$ ή $\upsilon_1 = 1m/s$

Μόλις κοπεί το νήμα θα ανεβαίνει τη σανίδα ομαλά επιβραδυνόμενος μέχρι να σταματήσει για χρονικό διάστημα $\Delta t$.
αρα έχουμε:

$$\Sigma\vec{F} = M_K \cdot \vec{\alpha}_{cmK}' \quad \acute{\eta} \quad M_K g\eta\mu\varphi - T_\sigma = M_K \cdot \alpha_{cmK}' \quad (\alpha_{cmK}' = \alpha_\gamma' \cdot R_K)$$

και

$$\Sigma\vec{\tau}_K = I_K \cdot \vec{\alpha}_{\gamma K}' \quad \acute{\eta} \quad T_\sigma \cdot R_K = \frac{1}{2} M_K R_K^2 \alpha_{\gamma K}' \quad \acute{\eta} \quad T_\sigma = \frac{1}{2} M_K \cdot \alpha_{cmK}'$$

αρα

$$M_K g\eta\mu\varphi - \frac{M_K \alpha_{cm}'}{2} = M_K \cdot \alpha_{cm}' \quad \acute{\eta} \quad \frac{3}{2}\alpha_{cmK}' = g\,\eta\mu\varphi \quad \acute{\eta}$$

$\frac{3}{2} a_{cm}' = \frac{1}{2} g \rightarrow a_{cm}' = \frac{g}{3}$

ή $a_{cm}' = \frac{10}{3}\ m/s^2$

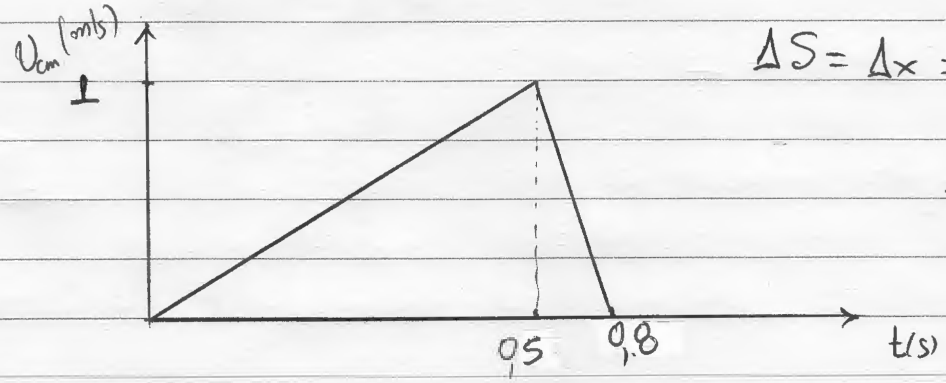
άρα στο χρονικό διάστημα επιβράδυνσης ισχύει ότι:

$v_f = v_1 - a_{cm}' \cdot \Delta t$ ή $0 = 1 - \frac{10}{3} \cdot \Delta t$ ή $\Delta t = \frac{3}{10} = 0,3s$

άρα $t_2 = t_1 + \Delta t = 0,5 + 0,3$ ή $t_2 = 0,8s$

Δ4 |

α' τρόπος γραφικά




$\Delta S = \Delta x = E_{\mu\beta} = \frac{\beta v}{2} = \frac{0,8}{2}$

$\Delta S = 0,4\ m$

β' τρόπος με εξισώσεις

$0 - t_1$: Ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς $v_0$

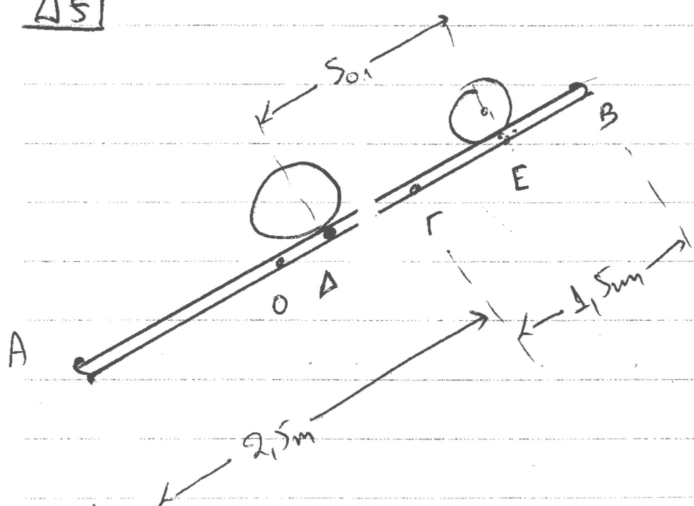
$S_1 = \frac{1}{2} a_{cm,k} t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,25m$

$t_1 - t_2$: Ευθύγραμμη ομαλά επιβραδυνόμενη με $v_0$

$S_2 = v_1 \cdot \Delta t - \frac{1}{2} a_{cm}' \Delta t^2 = 0,3 - \frac{1}{2} \frac{10}{3} \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{3}{10} - \frac{1}{2} \frac{3}{10} = \frac{1}{2} \frac{3}{10}$ ή

$S_2 = 0,15m$ άρα $S_{ολ} = S_1 + S_2 = 0,25 + 0,15 = 0,4m$.

**Δ5)**




Κατά την άνοδο του κυλίνδρου πάνω στη σανίδα διανύει απόσταση $S_{01} = 0,4m$ και σταματά στη θέση Ε με $ΔΕ = 0,4m$
$ΔΓ = 0,2\,m$ και $ΓΕ = 0,2m$

Έστω Ο μέσο του ΑΒ άρα $(ΟΓ) = (ΟΒ) - (ΒΓ) = 2 - 1,5 = 0,5m$
και έστω ότι ανατρέπεται άρα έχουμε θεωρώντας θετική φορά - αριστερόστροφα

$$\Sigma\tau_{(Γ)} = Mg\,συνφ \cdot ΟΓ - M_κ g \cdot συνφ(ΓΕ)$$

$$\Sigma\tau_{(Γ)} = 2 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(ΟΓ - ΓΕ) = 10\sqrt{3}(0,5 - 0,2) = 10\sqrt{3} \cdot 0,3 = 3\sqrt{3} > 0$$

άρα δεν ανατρέπεται αφού υπερισχύει η ροπή του βάρους της σανίδας

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΤΣΙΚΛΙΔΗ ΜΑΡΙΑ
ΤΣΙΚΛΙΔΗΣ ΓΡΗΓΟΡΗΣ
ΘΑΝΟΥ ΕΦΗ
ΜΑΡΟΥΛΗΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ