ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2018
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

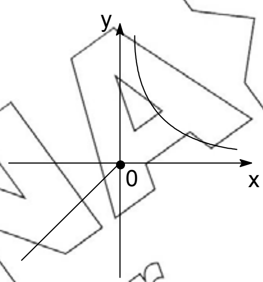
ΘΕΜΑ Α

Α.1 Απόδειξη θεωρήματος σελίδα 99 στο σχολικό

Α.2 **α)** Ψ

β) Η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x & , \ x\le 0 \\ \dfrac{1}{x} & , \ x>0 \end{cases}$

είναι 1-1 αφού κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη C_f σε ένα ακριβώς σημείο , ενώ η f δεν είναι γνήσια μονότονη σε όλο το R με το ίδιο είδος μονοτονίας, αφού f $\nearrow$ στο $(-\infty,0]$ και f $\searrow$ στο $(0,+\infty)$



Α.3 σελίδα 216 στο σχολικό

Α.4 α → Λ β → Λ γ → Σ δ → Σ ε → Σ

ΘΕΜΑ Β

Συνάρτηση $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^3-4}{x^2}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Β.1 Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $R^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

Με $f'(x)=\dfrac{3x^2\cdot x^2-(x^3-4)2x}{x^4}=\dfrac{3x^4-2x^4+8x}{x^4}=$

$=\dfrac{x^4+8x}{x^4}=\dfrac{x(x^3+8)}{x^4}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+\infty$
x^3+8	−	+	+
x^3	−	−	+
f '(x)	+	−	+
f(x)	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

T.M

$\boxed{f(-2)=-3}$

- $x^3+8>0 \Leftrightarrow x^3>-8 \Leftrightarrow x>-2$
- $x^3>0 \Leftrightarrow x>0$

ΠΥΡΗΝΑΣ www.pyr.gr

Η συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-2]$, γνήσια φθίνουσα στο $[-2,0)$ και γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Η f παρουσιάζει στη θέση $x=-2$ τοπικό μέγιστο το $f(-2)=-3$.

B.2 $$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{3x^2\cdot x^3-\left(x^3+8\right)\cdot 3x^2}{x^6}=$$

$$=\frac{\cancel{3x^5}-\cancel{3x^5}-24x^2}{x^6}=-\frac{24}{x^4}<0$$

Η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0+\infty)$ και δεν παρουσιάζει σημεία καμπής.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$-$	‖	$-$
f	$\frown$	‖	$\frown$

B.3 **Κατακόρυφες ασύμπτωτες**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=0-(+\infty)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=0-(+\infty)=-\infty$

Άρα η ευθεία x=0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f (από δεξιά - κάτω και από αριστερά - κάτω).

Δεν υπάρχουν άλλες κατακόρυφες ασύμπτωτες της C_f επειδή η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1-0=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\cancel{x}-\dfrac{4}{x^2}-\cancel{x}\right)=0$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\frac{4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^3}\right)=1-0=1$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\cancel{x}-\dfrac{4}{x^2}-\cancel{x}\right)=0$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

ΠΥΡΗΝΑΣ
www.pyr.gr

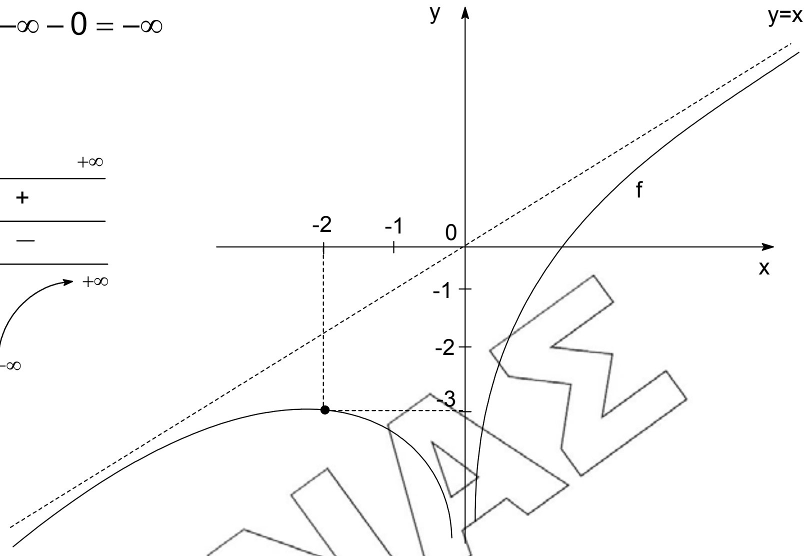
B.4 Οριακές τιμές της f

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = +\infty - 0 = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right) = -\infty - 0 = -\infty$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
f ΄		+	0	−	‖	+	
f ΄΄		−		−	‖	−	
f	$-\infty$	↗	T.M	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

T.M

$\boxed{f(-2) = -3}$



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Ένα σύρμα μήκους 8 m κόβεται σε δύο τμήματα μήκους x m και (8-x) m αντίστοιχα, όπου 0<x<8.

- Με το τμήμα μήκους x m κατασκευάζουμε τετράγωνο, το οποίο έχει πλευρά $\dfrac{x}{4}$

  Άρα έχει εμβαδόν $\left(\dfrac{x}{4}\right)^2 = \dfrac{x^2}{16} m^2$

- Με το άλλο τμήμα κατασκευάζουμε κύκλο ακτίνας ρ.

Ισχύει: (μήκος κύκλου) $= 8 - x \Leftrightarrow$

$$2\cdot\pi\cdot\rho = 8 - x \Leftrightarrow$$

$$\rho = \frac{8-x}{2\pi}$$

$$(\text{Εμβαδόν κύκλου}) = \pi\cdot\rho^2 = \frac{\cancel{\pi}\cdot(8-x)^2}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{64-16x+x^2}{4\pi}$$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι

$$E(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{64-16x+x^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 256 - 64x + 4x^2}{16\pi} =$$

$$= \frac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}\ ,\ x\in(0,8)$$

ΠΥΡΗΝΑΣ www.pyr.gr

Γ.2 Η συνάρτηση Ε(x) είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο διάστημα (0,8) με

$$E'(x) = \frac{1}{16\pi}\left[2\cdot(\pi+4)x - 64\right] = \frac{1}{8\pi}\left[(\pi+4)x - 32\right],\ 0 < x < 8$$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{32}{\pi+4}$

- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow (\pi+4)x - 32 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{32}{\pi+4}$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
E΄		−	0	+	
E		↘		↗	

ΟΛ.ΕΛ.

$E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right) = \dfrac{16}{\pi+4}$

Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ και γνήσια αύξουσα στο $\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$.
Άρα η συνάρτηση Ε(x) ελαχιστοποιείται όταν $x = \dfrac{32}{\pi+4}$ και τότε η πλευρά του τετραγώνου είναι $\alpha = \dfrac{x}{4} = \dfrac{8}{\pi+4}$ και η διάμετρος του κύκλου είναι

$$2\rho = \cancel{2}\cdot\frac{8-x}{\cancel{2}\pi} = \frac{8-\dfrac{32}{\pi+4}}{\pi} = \frac{8\pi+\cancel{32}-\cancel{32}}{\pi(\pi+4)} = \frac{8\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}(\pi+4)} = \frac{8}{\pi+4},$$ άρα το άθροισμα

των εμβαδών ελαχιστοποιείται όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Γ.3 Συνάρτηση $E(x) = \dfrac{(\pi+4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}$, $x \in R$

- $E(0) = \dfrac{256}{16\pi} = \dfrac{16}{\pi}$

- $$E\left(\frac{32}{\pi+4}\right) = \frac{1}{16\pi}\left[\cancel{(\pi+4)}\cdot\frac{32^2}{(\pi+4)^{\cancel{2}}} - 64\cdot\frac{32}{\pi+4} + 256\right] =$$
$$= \frac{1}{16\pi}\left[\frac{32^2}{\pi+4} - \frac{64\cdot 32}{\pi+4} + 256\right] =$$
$$= \frac{\overset{2}{\cancel{32}}}{\cancel{16}\pi}\left(\frac{32}{\pi+4} - \frac{64}{\pi+4} + 8\right) = \frac{2}{\pi}\left(8 - \frac{32}{\pi+4}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{8\pi+\cancel{32}-\cancel{32}}{\pi+4} = \frac{16\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}(\pi+4)} = \frac{16}{\pi+4}$$

- $E(8) = \dfrac{(\pi+4)\cdot 64 - 512 + 256}{16\pi} = \dfrac{64\pi + \cancel{256} - \cancel{512} + \cancel{256}}{16\pi} = \dfrac{64\pi}{16\pi} = 4$

Θέλω να δείξω ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0,8)$ ώστε $E(x_o)$=5.

ΠΥΡΗΝΑΣ www.pyr.gr

- Στο διάστημα $A_1=\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]$ η E(x) είναι συνεχής και $\searrow$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το
$E(A_1)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\ \lim\limits_{x\to 0^+}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},\dfrac{16}{\pi}\right)$
Αφού $\dfrac{16}{\pi+4}\simeq 2{,}24$ και $\dfrac{16}{\pi}\simeq 5{,}9$, ισχύει ότι $5\in E(A_1)$ και αφού E(x) $\searrow$ στο A_1, υπάρχει μοναδικό $x_o\in\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right)$ ώστε $E(x_o)=5$.

- Στο διάστημα $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$ η E(x) είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $E(A_2)=\left[E\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\ \lim\limits_{x\to 8}E(x)\right)=\left[\dfrac{16}{\pi+4},4\right)$
το οποίο **δεν** περιέχει το 5, άρα η εξίσωση E(x)=5 είναι αδύνατη στο διάστημα $A_2=\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)$
Επομένως ισχύει το ζητούμενο.

- Η συνάρτηση E(x) είναι συνεχής σε όλο το R ως πολυωνυμική, άρα $\lim\limits_{x\to 0}E(x)=E(0)=\dfrac{16}{\pi}$ και $\lim\limits_{x\to 8}E(x)=E(8)=4$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 f παραγωγίσιμη και συνεχής στο R με
$f'(x)=\left(2e^{x-\alpha}-x^2\right)'=2e^{x-\alpha}-2x$
f΄ παραγωγίσιμη και συνεχής στο R με

$f''(x)=(2e^{x-\alpha}-2x)'=2e^{x-\alpha}-2\ ,\ \alpha>1$

$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2=0\Leftrightarrow x=\alpha$
$f''(x)>0\Leftrightarrow 2e^{x-\alpha}-2>0\Leftrightarrow x>\alpha$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f΄΄(x)		−	0	+	
f (x)		$\frown$		$\smile$	

Σ.Κ.
$\boxed{f(\alpha)=2-\alpha^2}$

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(-\infty,\alpha]$ και κυρτή στο $[\alpha,+\infty)$.
Το σημείο Α(α, $2-\alpha^2$) είναι το μοναδικό σημείο καμπής της C_f επειδή μόνο σ' αυτό αλλάζει η κυρτότητα της f και υπάρχει η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_f , αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
f΄΄(x)		−	0	+	
f '(x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε.
$\boxed{f'(\alpha)=2-2\alpha}$

ΠΥΡΗΝΑΣ
www.pyr.gr

Δ.2 Στο διάστημα $A_1=(-\infty,\alpha]$ η f' είναι $\searrow$ και συνεχής οπότε:

$$f'(A_1)=\left[f'(\alpha)\,,\,\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$$

$$f'(\alpha)=2(1-\alpha)<0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\lim_{x\to-\infty}2(e^{x-\alpha}-x)=+\infty$$

$$\cdot\lim_{x\to-\infty}2(e^{x-\alpha})=0$$

Στο διάστημα $A_2=[\alpha,+\infty)$ η f' είναι $\nearrow$ και συνεχής οπότε:

$$f'(A_2)=\left[f'(\alpha)\,,\,\lim_{x\to+\infty}f'(x)\right)=\left[2(1-\alpha),+\infty\right)$$

- $$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}2\left(e^{x-\alpha}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[2x\left(\frac{e^{x-\alpha}}{x}-1\right)\right]=+\infty$$

  Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-\alpha}}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D\cdot L\cdot H}{=}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^{x-\alpha}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-\alpha}=+\infty$

  Οπότε $0\in f(A_1)$ και $0\in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,\alpha)$

  μοναδικός (αφού $f'\searrow(-\infty,\alpha]$) ώστε $f'(x_1)=0$

  και υπάρχει $x_2\in(\alpha,+\infty)$ μοναδικός (αφού $f'\nearrow[\alpha,+\infty)$) ώστε $f'(x_2)=0$

- Για $x<x_1\overset{f'\searrow(-\infty,\alpha]}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_1)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow(-\infty,x_1]$.

- Για $x_1<x<\alpha\overset{f'\searrow(-\infty,\alpha]}{\Rightarrow}f'(x_1)>f'(x)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[x_1,\alpha]$

  Άρα στο $x=x_1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

- Για $\alpha<x<x_2\overset{f'\nearrow[\alpha,+\infty)}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_2)\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f\searrow[\alpha,x_2]$

- Για $x_2<x\overset{f'\nearrow[\alpha,+\infty)}{\Rightarrow}f'(x_2)<f'(x)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f\nearrow[x_2,+\infty)$

  Άρα στο $x=x_2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f(x)		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	
			Τ.Μ				Τ.Ε		

ΠΥΡΗΝΑΣ www.pyr.gr

Δ.3 Η f συνεχής και $\searrow$ στο διάστημα $\Delta=(\alpha,x_2)$ άρα $f(\Delta)=\big(f(x_2),f(\alpha)\big)$.

Είναι α>1 και μάλιστα $x_1<1<\alpha$ αφού αν

$$1\le x_1<\alpha \overset{f'\searrow(-\infty,\alpha]}{\Rightarrow} f'(1)\ge f'(x_1)\Rightarrow 2e^{1-\alpha}-2\ge 0\Rightarrow e^{1-\alpha}\ge 1\Rightarrow 1-\alpha\ge 0\Rightarrow \alpha\le 1 \quad \text{Άτοπο.}$$

Άρα $x_1<1<\alpha<x_2 \overset{f\searrow[x_1,x_2]}{\Rightarrow} f(1)>f(\alpha)>f(x_2)$, άρα $f(1)\notin f(\Delta)=\big(f(x_2),f(\alpha)\big)$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=f(1)$ είναι αδύνατη στο διάστημα (α,x_2).

Δ.4 Για $\alpha=2$ είναι $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in R$

Βρίσκω την εφαπτομένη της C_f στο $x=2$.

$f'(2)=-2$, $f(2)=-2$

Η εξίσωσή της είναι: $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow$

$y+2=-2(x-2)\Rightarrow y+2=-2x+4\Rightarrow y=-2x+2$.

f κυρτή στο $[2,+\infty)$ οπότε ισχύει:

$f(x)\ge -2x+2\Rightarrow f(x)\cdot\sqrt{x-2}\ge(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}$

Το "=" ισχύει μόνο για $x=2$ κι αφού οι συναρτήσεις $f(x)$, $\sqrt{x-2}$, $-2x+2$ είναι συνεχείς στο διάστημα [2,3] (ως παραγωγίσιμες) , ισχύει :

$$\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>\int_2^3(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx \quad (1)$$

$$\int_2^3(-2x+2)\cdot\sqrt{x-2}\,dx\overset{*}{=}\int_0^1\left(-2u^2-4+2\right)u\cdot 2u\cdot du=$$

$$\int_0^1\left(-4u^4-4u^2\right)du=\left[-\frac{4u^5}{5}-\frac{4u^3}{3}\right]_0^1=-\frac{4}{5}-\frac{4}{3}=-\frac{32}{15}$$

*

$u=\sqrt{x-2}\Rightarrow u^2=x-2\Rightarrow$

$x=u^2+2$

$dx=2udu$

$x=2\Rightarrow u=0$

$x=3\Rightarrow u=1$

$$(1)\quad\Rightarrow\int_2^3 f(x)\cdot\sqrt{x-2}\,dx>-\frac{32}{15}$$

Επιμέλεια απαντήσεων

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΠΥΡΗΝΑΣ www.pyr.gr