ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 262 (i)
Α.2 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 141
Α.3 βλ. σχολικό βιβλίο σελ. 246-247
Α.4 **α** → Λ, **β** → Σ , **γ** → Λ, **δ** → Σ, **ε** → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Η f είναι ορισμένη, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και συνεχής με $f'(x)=\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)'=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f '	—	0	+
f	↘	Ο.Ε f(0)=0	↗

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.
Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
Στο x=0 η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το f(0)=0.

Β2. Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

- $f''(x)=0\Leftrightarrow 1-3x^2=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- $f''(x)>0\Leftrightarrow 1-3x^2>0\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$	Σ.Κ	$\smile$	Σ.Κ	$\frown$	
			$f(-\sqrt{3}/3)=1/4$		$f(\sqrt{3}/3)=1/4$		

- f κοίλη $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- f κυρτή $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
- f κοίλη $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

Τα μοναδικά σημεία καμπής της C_f είναι τα $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{4}\right)$ αφού σε καθένα από αυτά αλλάζει η κυρτότητα της f και υπάρχει η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_f ,αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

B3. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

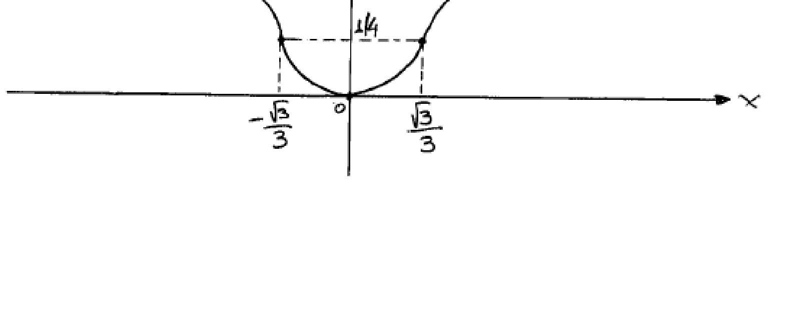
και

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

B4. f άρτια στο $\mathbb{R}$ αφού $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,οπότε η C_f έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
f'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
f''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$	Σ.Κ	$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	Σ.Κ	$\nearrow$	1
			$\boxed{1/4}$		$\boxed{0}$		$\boxed{1/4}$		



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$. Η εξίσωση g(x)=0 έχει προφανή ρίζα x=0. Είναι παραγωγίσιμη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)'=2x(e^{x^2}-1)$.

- $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2}-1)=0 \Leftrightarrow 2x=0$ ή $e^{x^2}-1=0 \Leftrightarrow$

$$x=0 \quad ή \quad e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x=0$$

- $2x>0 \Leftrightarrow x>0$
- $e^{x^2}-1>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
$e^{x^2}-1$		$+$	0	$+$	
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	$\boxed{ΟΕ}$ $g(0)=0$	$\nearrow$	

$g \searrow (-\infty,0]$

για κάθε x<0 $\Rightarrow$ g(x)>g(0)$\Rightarrow$g(x)>0

$g \nearrow [0,+\infty)$

για κάθε x>0 $\Rightarrow$ g(x)>g(0)$\Rightarrow$g(x)>0

Μοναδική ρίζα της g(x)=0 είναι x=0.

Γ2. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$, $x\in\mathbb{R}$. Η $g(x)=e^{x^2}-x^2-1$ έχει μοναδική λύση x=0 και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\geq 0$.

Έχουμε $|f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$ (1). Η f έχει μοναδική ρίζα x=0 και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Για x<0:

- Αν f(x)>0 τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$.
- Αν f(x)<0 τότε $-f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

Για x>0:

- Αν f(x)>0 τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$.
- Αν f(x)<0 τότε $-f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$.

Άρα όλες οι συνεχείς $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι:

- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,x\leq 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x>0 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1 & ,x\geq 0 \end{cases}$

Γ3. f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις των δύο φορές παραγωγίσιμων συναρτήσεων e^{x^2}, x^2-1.

$f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$

$f''(x)=2(2x^2e^{x^2}+e^{x^2}-1)\geq 0$ αφού $2x^2e^{x^2}\geq 0$ και $e^{x^2}-1\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το = ισχύει μόνο για x=0, άρα f΄ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Η εξίσωση:

$f\left(|ημx|+3\right)-f\left(|ημx|\right)=f(x+3)-f(x)$, $x\geq 0$ (1), έχει προφανή ρίζα x=0, αφού για x=0 η εξίσωση γίνεται: f(3)–f(0)=f(3)–f(0).

- Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x), x\geq 0$.

  h παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty]$ άρα και συνεχής ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων f(x), f(x+3) ως σύνθεση $\left\langle \begin{matrix} f(x) \\ x+3 \end{matrix} \right.$ που είναι παραγωγίσιμες,

  με $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$, αφού

  $x+3>x\geq 0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$, άρα h γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty]$.Για κάθε x>0 ισχύει:

  $|ημx|<x \overset{h\nearrow}{\Rightarrow} h\left(|ημx|\right)<h(x)\Rightarrow f\left(|ημx|+3\right)-f\left(|ημx|\right)<f(x+3)-f(x)$.

  Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση x=0.

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

- f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής.

Δ1. Θέτω $φ(x)=\dfrac{f(x)}{ημx}$, $ημx\neq 0$ και $\lim\limits_{x\to 0}φ(x)=1$. Τότε $f(x)=φ(x)\cdot ημx$ και

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(φ(x)\cdot ημx\right)=1\cdot 0=0$. Αφού f συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Δίνεται ότι:

$$\int_0^π\left(f(x)+f''(x)\right)ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^π f(x)ημx\,dx+\int_0^π f''(x)ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$

$$\int_0^π f(x)\left(-συνx\right)'dx+\int_0^π\left(f'(x)\right)'ημx\,dx=π \Leftrightarrow$$

$$\left[-f(x)συνx\right]_0^π+\cancel{\int_0^π f'(x)συνx\,dx}+\left[f'(x)ημx\right]_0^π-\cancel{\int_0^π f'(x)συνx\,dx}=π \Leftrightarrow$$

$$-f(π)συνπ+f(0)συν0+\cancel{f'(π)ημπ}^{0}-\cancel{f'(0)ημ0}^{0}=π \Leftrightarrow$$

$$f(π)+f(0)=π \Leftrightarrow$$

$$f(π)=π$$

- $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{ημx}\cdot\dfrac{ημx}{x}\right)=1\cdot 1=1$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$. Αφού f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ισχύει από θεώρημα Fermat ότι $f'(x_0)=0$.

Ισχύει : $e^{f(x)} + x = f\left(f(x)\right) + e^x, x \in \mathbb{R}$ (1).

Οι συναρτήσεις: x, e^x, f(x) είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ άρα και $e^{f(x)}$, $f\left(f(x)\right)$ παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Παραγωγίζω και τα δύο μέλη της (1):

$$\left(e^{f(x)} + x\right)' = \left(f\left(f(x)\right) + e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'\left(f(x)\right) \cdot f'(x) + e^x, x \in \mathbb{R}$$

Για $x=x_0 \Rightarrow \quad e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'\left(f(x_0)\right) \cdot f'(x_0) + e^{x_0} \Leftrightarrow$

$e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$ κι αφού $f'(x_0) = 0$, ισχύει $f'(0)=0$,άτοπο ,αφού $f'(0)=1$ από Δ1. Άρα η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Από (α) ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη. Άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.Αφού επιπλέον $f'(0) = 1 > 0$,τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,άρα το σύνολο τιμών της f είναι

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \mathbb{R}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Για $x > 0 \xRightarrow{f\nearrow} f(x) > f(0) \Rightarrow f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

$$\left.\begin{matrix} -1 \leq ημx \leq 1 \\ -1 \leq συνx \leq 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2 \leq ημx + συνx \leq 2 \xRightarrow[f(x)>0]{} -\frac{2}{f(x)} \leq \frac{ημx + συνx}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}.$$

- $$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{f(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\dfrac{2}{f(x)}\right) = 0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{Κριτήριο παρεμβολής}} \lim_{x\to+\infty} \frac{ημx + συνx}{f(x)} = 0$$

Δ4. $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx = \int_0^\pi f(t) dt$

- t=lnx
- $dt = \dfrac{1}{x} dx$
- $x=1 \Rightarrow t=0$
- $x=e^\pi \Rightarrow t=π$

Στο $[0,π]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε: $0 \leq x \leq π \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(π) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq π$.

- Στο $[0,π]$ η f είναι συνεχής και $f(x) \geq 0$ όπου το = ισχύει μόνο για x=0 (f γνησίως αύξουσα) ,άρα $\int_0^\pi f(x)dx > 0$.

Επίσης $f(x) \leq π \Leftrightarrow π - f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0,π]$ όπου το = ισχύει μόνο για x=π (f γνησίως αύξουσα). Άρα:

$$\int_0^{\pi}\big(\pi - f(x)\big)dx > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi}\pi dx - \int_0^{\pi}f(x)dx > 0 \Leftrightarrow \pi(\pi - 0) > \int_0^{\pi}f(x)dx \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi}f(x)dx < \pi^2$$

Άρα $0 < \int_0^{\pi}f(x)dx < \pi^2$. Επομένως ισχύει $0 < \int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ