ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών σελίδα 194 σχολικού βιβλίου η απόδειξη του θεωρήματος
Α.2 Ορισμός σελίδα 188 σχολικού βιβλίου
Α.3 Ορισμός σελίδα 259 σχολικού βιβλίου

Α.4 **α. Λ** **β. Σ** **γ. Λ** **δ. Σ** **ε. Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4\cdot|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$(z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 16 = 4z\bar{z} - \cancel{4z} - \cancel{4\bar{z}} + 4 \Leftrightarrow$

$3z\bar{z} = 12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$

Άρα ο γ. τ. των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος κέντρου Ο(0,0) κι ακτίνας ρ=2

Β.2 **α.** $|z| = 2 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{4}{z}$

Για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύει $|z_1|=2$, $|z_2|=2$ άρα ισοδύναμα ισχύει:

$\bar{z}_1 = \frac{4}{z_1}$ και $\bar{z}_2 = \frac{4}{z_2}$

Είναι $\bar{w} = 2\cdot\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + 2\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = 2\cdot\frac{\frac{\cancel{4}}{z_1}}{\frac{\cancel{4}}{z_2}} + 2\cdot\frac{\frac{\cancel{4}}{z_2}}{\frac{\cancel{4}}{z_1}} = 2\cdot\frac{z_2}{z_1} + 2\cdot\frac{z_1}{z_2} = w$, άρα $w \in R$

β. Θέλω να δείξω ότι $-4 \le w \le 4 \overset{w\in R}{\Leftrightarrow} |w| \le 4$. Πράγματι:

$$w = \left|2\cdot\frac{z_1}{z_2} + 2\cdot\frac{z_2}{z_1}\right| = 2\cdot\left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1}\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{τριγωνική} \\ \text{ανισότητα}}}{\le} 2\cdot\left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_1}\right|\right) = 2\left(\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right) = 2\cdot\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = 2\cdot(1+1) = 4$$

Άρα $|w| \le 4$.

Β.3 Αν $w=-4$ τότε $2\frac{z_1}{z_2}+2\frac{z_2}{z_1}=-4 \overset{:2}{\Leftrightarrow} \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2 \overset{\cdot z_1z_2}{\Leftrightarrow}$

$$z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Leftrightarrow \left(z_1+z_2\right)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0 \Leftrightarrow z_2=-z_1$$

Άρα:

- $(AB)=\left|z_1-z_2\right|=\left|z_1+z_1\right|=\left|2z_1\right|=2\left|z_1\right|=4$
- $(B\Gamma)=\left|z_2-z_3\right|=\left|-z_1-2iz_1\right|=\left|z_1(-1-2i)\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|-1-2i\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|1+2i\right|=$
  $=2\cdot\sqrt{1^2+2^2}=2\sqrt{5}$
- $(\Gamma A)=\left|z_3-z_1\right|=\left|2iz_1-z_1\right|=\left|z_1(-1+2i)\right|=\left|z_1\right|\cdot\left|-1+2i\right|=$
  $=2\cdot\sqrt{\left(-1\right)^2+2^2}=2\sqrt{5}$

Άρα (ΒΓ)=(ΓΑ)=$2\sqrt{5}$, άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$

Γ.1 Η f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο R με

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x\cdot(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0,\quad \forall x\in R$$

Αφού $\forall x\in R$ ισχύει $e^x>0$, $\left(x^2+1\right)^2>0$, $\left(x-1\right)^2\geq 0$ όπου $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	o	+
f		$\nearrow$	

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο R

Η f είναι συνεχής και $\nearrow$ στο R, άρα έχει σύνολο τιμών το
$f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)\right)=\left(0,+\infty\right)$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)=0\cdot 0=0$

  Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}$

  $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=\frac{1}{2}\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$

Γ.2

Εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\dfrac{e^2}{5}\ ,\ x\in R \Leftrightarrow$

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2) \overset{f\ 1\text{–}1\ \text{αφού}\ f\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$$e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^3\left(x^2+1\right)}{e^x}=2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2} \Leftrightarrow$$

$$f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Ο πραγματικός αριθμός $\dfrac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών $f(R)=\left(0,+\infty\right)$ της f, και

αφού f 1-1, υπάρχει μοναδική ρίζα στο R για την εξίσωση $f(x)=\dfrac{e^3}{2}$

Γ.3 Για κάθε x>0 θα δείξω ότι ισχύει

$$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{4x} f(t)dt < 2xf(x) \Leftrightarrow$$

$$\int_{1}^{4x} f(t)dt - \int_{1}^{2x} f(t)dt < 2xf(x)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $K(x)=\int_{1}^{x} f(t)dt, x\in(0,+\infty)$

Αφού η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο $\left(0,+\infty\right)$ ισχύει ότι η συνάρτηση K(x) είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ με K΄(x) = f(x).

$\forall x > 0$ ισχύει 0 < x < 2x < 4x, άρα ορίζεται το διάστημα [2x, 4x] στο οποίο η συνάρτηση K(x) είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής), άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(2x,4x)$ ώστε

$$K'(\xi)=\frac{K(4x)-K(2x)}{4x-2x} \Leftrightarrow$$

$$f(\xi)=\frac{\int_{1}^{4x} f(t)dt - \int_{1}^{2x} f(t)dt}{2x} \Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}$$

Αφού $0<2x<\xi<4x \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\xi)<f(4x) \Rightarrow$

$$\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \overset{\cdot 2x>0}{\Rightarrow} \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$$

Γ.4 $$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}=\dfrac{K(4x)-K(2x)}{x}, & x>0\\ \\ 2, & x=0\end{cases}$$

- Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $g(x)=\dfrac{K(4x)-K(2x)}{x}$

  άρα g(x) είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων K(4x), K(2x) (σύνθεση των παραγωγίσιμων 4x, K(x) και 2x, K(x)) και x. Ισχύει

  $$g'(x)=\frac{\left(4K'(4x)-2K'(2x)\right)x-\left(K(4x)-K(2x)\right)}{x^2}=$$

  $$=\frac{4xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$

  $$=\frac{2xf(4x)+2xf(4x)-2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$

  $$=\frac{\left(2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)+2x\cdot\left(f(4x-f(2x)\right)}{x^2}>0\ ,\quad \forall x\in(0,+\infty)$$

  Επειδή $\forall x>0$ ισχύει $x^2>0$ κι από Γ.3 έχουμε $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$

  και $0<2x<4x\overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(2x)<f(4x)\Rightarrow$

  $f(4x)-f(2x)>0\underset{\cdot 2x>0}{\Rightarrow} 2x\left(f(4x)-f(2x)\right)>0, \forall x>0$

- Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{K(4x)-K(2x)}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}$

  $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{4K'(4x)-2\cdot K'(2x)}{1}=\lim_{x\to 0^+}\left(4f(4x)-2f(2x)\right)=$$

  $$\overset{f\ \text{συνεχής}}{=} 4\cdot f(0)-2f(0)=4\cdot 1-2\cdot 1=2=g(0)$$

  άρα η g είναι συνεχής στο x_o=0

- K(4x), K(2x) είναι συνεχείς συναρτήσεις (ως παραγωγίσιμες) άρα

  $\lim\limits_{x\to 0^+} K(4x)=K(0)=\int_1^0 f(t)dt$

  $\lim\limits_{x\to 0^+} K(2x)=K(0)=\int_1^0 f(t)dt$

  άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}(K(4x)-K(2x))=K(0)-K(0)=0$

- Η g είναι συνεχής στο x_o=0 και g συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως παραγωγίσιμη, άρα g συνεχής στο $[0,+\infty)$ κι αφού $g'(x)>0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ ισχύει g $\nearrow$ στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 $\forall x\in R$ ισχύει
$$f'(x)\cdot e^{f(x)}+f'(x)\cdot e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow$$
$$f'(x)\cdot e^{f(x)}=2-f'(x)\cdot e^{-f(x)}\Leftrightarrow$$
$$\left(e^{f(x)}\right)'=\left(2x+e^{-f(x)}\right)'\Leftrightarrow$$
$$e^{f(x)}=2x+e^{-f(x)}+c_1\ ,$$

Όπου για x=0 είναι $e^{f(0)}=e^{-f(0)}+c_1\Leftrightarrow$
$$1=1+c_1\Leftrightarrow c_1=0$$
Άρα $e^{f(x)}=2x+e^{-f(x)}\ ,\ \forall x\in R\underset{\cdot e^{f(x)}}{\Leftrightarrow}$
$$e^{2f(x)}-2x\cdot e^{f(x)}=1\Leftrightarrow$$
$$e^{2f(x)}-2x\cdot e^{f(x)}+x^2=x^2+1\Leftrightarrow$$
$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1\ ,\ \forall x\in R \qquad (1)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=e^{f(x)}-x\ ,\ x\in R$

Λόγω της (1) ισχύει $g^2(x)=\underbrace{x^2+1}_{\neq 0}\ ,\ \forall x\in R$

Άρα $g(x)\neq 0\ ,\ \forall x\in R$ κι αφού η $g(x)$ είναι συνεχής στο R ως πράξεις μεταξύ των συνεχών x (πολυωνυμική), e^x (εκθετική) και f(x) (ως παραγωγίσιμη) ισχύει ότι η g(x) διατηρεί στο R σταθερό πρόσημο. Αφού επιπλέον είναι $g(0)=e^{f(0)}=e^o=1>0$, ισχύει $g(x)>0\ ,\ \forall x\in R$

Άρα από $g^2(x)=x^2+1\Leftrightarrow g(x)=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$
$$e^{f(x)}-x=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow$$
$$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ,\ x\in R$$

Δ.2 α.
$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\cancel{x+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}+x}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\ ,\ \forall x\in R \qquad \text{άρα } f\ \nearrow \text{ στο } R.$$

$$f''(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,2}}\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=-\frac{1}{x^2+1}\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}\ ,\ x\in R$$

όπου $x^2+1>0\ ,\ \sqrt{x^2+1}>0\ \forall x\in R$

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	$+$	$\circ$	$-$
f	$\cup$	Σ.Κ $f(0)=0$	$\cap$

Η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. Το μοναδικό Σ.Κ. της C_f είναι το σημείο Ο(0,0) επειδή μόνο στο σημείο αυτό αλλάζει η κυρτότητα της f και υπάρχει η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_f, αφού f παραγωγίσιμη στο R.

β. Οι συναρτήσεις f(x) και g(x)=x είναι συνεχείς στο R (ως παραγωγίσιμη και πολυωνυμική αντίστοιχα)

Η συνάρτηση $\Delta(x)=f(x)-g(x)=f(x)-x$ είναι παραγωγίσιμη στο R (άρα και συνεχής) και

$$\Delta'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\leq 0\ ,\ \forall x\in R$$

όπου $\Delta'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα Δ $\searrow$ στο R, άρα $\forall x\geq 0 \Rightarrow \Delta(x)\leq \overset{0}{\Delta(0)} \Rightarrow f(x)-x\leq 0 \Rightarrow f(x)\leq x$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_0^1|\Delta(x)|dx=\int_0^1(x-f(x))dx=\int_0^1 xdx-\int_0^1 f(x)dx=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}-\int_0^1(x)'\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\left[x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+0+\left[\sqrt{x^2+1}=\right]_0^1=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=$$

$$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\ \text{τ.μ}$$

Δ.3 **α' τρόπος**

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\cdot x\cdot\ln|f(x)|\right]$$

- Η συνάρτηση $f^2(t)$ είναι συνεχής στο R άρα η συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f^2(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=f^2(x)$, άρα είναι και συνεχής στο R, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=h(0)=\int_0^0 f^2(t)dt=0$. Άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)\right)=e^0\cdot f^2(0)=1\cdot 0=0$$

- $$\lim_{x\to 0+}\left(x\cdot \ln|f(x)|\right)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\cdot f'(x)}{f(x)}=$$

$$-\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{x^{\cancel{2}}\cdot f'(x)}{\cancel{x}}}{\frac{f(x)}{x}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x\cdot f'(x)}{\frac{f(x)}{x}}=\frac{-0\cdot f'(0)}{f'(0)}=-\frac{0\cdot 1}{1}=0\ ,\ \text{επειδή}$$

- $$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{0}}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$$

αφού $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\forall x\in R$ άρα $f'(0)=1$

- f΄ συνεχής στο R (ως παραγωγίσιμη) άρα $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=1$

Άρα $$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\right)\cdot\left(x\ln|f(x)|\right)\right]=0\cdot 0=0$$

β' τρόπος

$$L=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\int_0^x f^2(t)dt\cdot \ln|f(x)|\right)$$

- $$L_1=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\int_0^x f^2(t)dt}=\lim_{u\to 0}\frac{e^u-1}{u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{u\to 0}e^u=1$$

- $$L_2=\lim_{x\to 0^+}\left(\int_0^x f^2(t)dt\cdot \ln|f(x)|\right)\overset{0\cdot(-\infty)=;}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{\int_0^x f^2(t)dt}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{D.L.H}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{f^2(x)}{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}}$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}{f^3(x)}=-1\cdot 0=0$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)\underset{f'\,\text{συνεχής}}{=}\lim\limits_{x\to 0^+}f'(0)=1$

και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)^2}{f^3(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{D.L.H}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cdot \cancel{f^2(x)}\int_0^x f^2(t)dt}{3\cancel{f^2(x)}\cdot f'(x)} =$

$$\frac{2}{3}\cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x f^2(t)dt}{f'(x)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{0}{f'(0)} = \frac{2}{3}\cdot\frac{0}{1} = 0$$

Άρα $L = L_1 \cdot L_2 = 1\cdot 0 = 0$

Δ.4 Θεωρώ τη συνάρτηση

$$H(x) = (x-2)\cdot\left(1 - 3\cdot\int_0^{x-2} f(t^2)dt\right) + (x-3)\cdot\left(8 - 3\cdot\int_0^x f^2(t)dt\right), \text{ όπου } x\in[2,3]$$

Η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο R, άρα και οι συναρτήσεις $f^2(t)$ και $f(t^2)$ είναι συνεχής στο R (σύνθεση των συνεχών f(t), t^2 και t^2, f(t) αντίστοιχα), άρα οι συναρτήσεις

$$\int_0^{x-2} f(t^2)dt \quad \text{και} \quad \int_0^x f^2(t)dt \text{ είναι παραγωγίσιμες στο R,}$$

άρα και συνεχείς στο R. Επίσης οι συναρτήσεις x-2, x-3 είναι συνεχείς στο R ως πολυωνυμικές άρα και η συνάρτηση H(x) είναι συνεχής στο R, ως πράξεις συνεχών.

$H(2) = 3\cdot\int_0^2 f^2(t)dt - 8$

$H(3) = 1 - 3\cdot\int_0^1 f(t^2)dt$

- $\forall t\in[0,2]$ έχω από (Δ.2β) ότι $f(t)\le t$

κι αφού f ↗ στο R με f(0)=0 ισχύει $f(t)\ge 0$, $\forall t\ge 0$

άρα είναι $0\le f(t)\le t$, $\forall t\in[0,2] \Rightarrow 0\le f^2(t)\le t^2$

άρα $t^2 - f^2(t)\ge 0$, $\forall t\in[0,2]$ όπου η συνάρτηση $t^2 - f^2(t)$ είναι συνεχής στο [0,2] χωρίς να είναι 0 σε όλο το [0,2] (για t=1 είναι $\left(1 - f^2(1) = 1 - \ln^2\left(1+\sqrt{2}\right)\neq 0\right)$,

άρα $\int_0^2\left(t^2 - f^2(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt \Leftrightarrow$

$$\int_0^2 f^2(t)dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \Leftrightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow$$

$$3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 < 0 \Leftrightarrow H(2) < 0$$

- Για κάθε $t\ge 0$ ισχύει $f(t)\le t$.

Θέτω όπου t το t^2 άρα ισχύει $f(t^2)\le t^2$, $\forall t\ge 0$

Επομένως $\forall t \in [0,1]$ η συνάρτηση $t^2 - f(t^2)$ είναι συνεχής (ως πράξεις συνεχών) και $t^2 - f(t^2) \geq 0$, χωρίς να είναι 0 σε όλο το [0,1] , $\left(1 - f(1) = 1 - \ln(1 + \sqrt{2}) \neq 0\right)$.

Άρα ισχύει

$$\int_0^1 \left(t^2 - f(t^2)\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(t^2)dt < \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot \int_0^1 f(t^2)dt < 1 \Leftrightarrow H(3) = 1 - 3 \cdot \int_0^1 f(t^2)dt > 0$$

Επομένως $H(2) \cdot H(3) < 0$, άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει στο διάστημα (2,3) τουλάχιστον μια ρίζα για την εξίσωση $H(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8 - 3\int_0^{x} f^2(t)dt}{x-2} = 0$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ