ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Απόδειξη στο σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

Α.2 Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της όταν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.
Τότε το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(x_o)$ και διαβάζεται η «παράγωγος της f στο x_o»

Δηλαδή $$f'(x_o)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$$

Α.3 Ο σταθμικός μέσος της μεταβλητής Χ ορίζεται ως εξής:

$$x=\frac{x_1\cdot w_1+x_2\cdot w_2+\ldots+x_v\cdot w_v}{w_1+w_2+\ldots+w_v}=\frac{\sum_{i=1}^{v}x_i\cdot w_i}{\sum_{i=1}^{v}w_i}$$

Α.4 **α. Λ**
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow$

$3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow$

$x=1/3$ $\qquad x = 1/2$ ή $x = 1/4$

Αφού $\varnothing \subseteq A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \subseteq \Omega \Rightarrow$
$0 \le P(A\cap B) \le P(A) \le P(A\cup B) \le 1$

κι αφού τα $P(A\cap B), P(A), P(A\cup B) \in \left\{\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right\}$

ισχύει ότι $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

B.2 $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B - A$

Άρα $P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - \frac{1}{4}$ (1)

Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων ισχύει

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$
$$P(B) = \frac{6}{12} - \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \Leftrightarrow P(B) = \frac{5}{12}$$

Άρα από (1) έχουμε: $P(A' - B') = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Ενδεχόμενο $\Delta = (A \cap B)'$

Άρα $P(\Delta) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

B.3 $P(E) = P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] \underset{\substack{\downarrow \\ A-B\ ,\ B-A\ \text{ασυμβίβαστα}}}{=} P(A - B) + P(B - A) =$

$$= \underbrace{P(A) - P(A \cap B) + P(B)}_{\downarrow} - P(A \cap B) =$$

$$= P(A \cup B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

B.4 $9x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \begin{cases} 2/3 \\ -1/3 \end{cases}$

Αφού $0 \le P(\Gamma) \le 1$ και $P(\Gamma) \in \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

Ισχύει ότι $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β,Γ είναι ασυμβίβαστα, δηλαδή $B \cap \Gamma = \varnothing$. Άρα από τον απλό προσθετικό νόμο πιθανοτήτων ισχύει

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12} > 1$$

Άτοπο, αφού $0 \le P(B \cup \Gamma) \le 1$

Άρα τα ενδεχόμενα Β, Γ **<u>δεν</u>** είναι ασυμβίβαστα

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 • Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 (δεξί άκρο $1^{ης}$ κλάσης) είναι 10%, άρα $f_1\%=10\%$

• Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 (αριστερό άκρο της $5^{ης}$ κλάσης) είναι 30%, άρα $f_5\%=30\%$

• Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην $3^η$ κλάση είναι

$$\alpha_3 = 108^o \Leftrightarrow 360^o \cdot f_3 = 108^o \Leftrightarrow f_3 = \frac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 = 0,3 \quad \text{άρα } f_3\% = 30\%$$

• Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow$

$$x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 + x_5f_5 = 14 \Leftrightarrow$$
$$9 \cdot 0,1 + 11 \cdot f_2 + 13 \cdot 0,3 + 15 \cdot f_4 + 17 \cdot 0,3 = 14 \Leftrightarrow$$
$$0,9 + 11 \cdot f_2 + 3,9 + 15 \cdot f_4 + 5,1 = 14 \Leftrightarrow$$
$$11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 14 - 0,9 - 3,9 - 5,1 \Leftrightarrow$$
$$11 \cdot f_2 + 15 \cdot f_4 = 4,1 \quad (1)$$

$x_1 = 9, x_2 = 11$
$x_3 = 13, x_4 = 15$
$x_5 = 17$ τα κέντρα των κλάσεων

• Ισχύει $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 = 1 \Leftrightarrow$

$$0,1 + f_2 + 0,3 + f_4 + 0,3 = 1 \Leftrightarrow$$
$$f_2 + f_4 = 0,3 \Leftrightarrow$$
$$f_4 = 0,3 - f_2$$

Άρα από (1) έχουμε: $11 \cdot f_2 + 15 \cdot (0,3 - f_2) = 4,1 \Leftrightarrow$

$$11 \cdot f_2 + 4,5 - 15 \cdot f_2 = 4,1 \Leftrightarrow -4 \cdot f_2 = -0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,1$$

Άρα από $f_4 = 0,3 - f_2$ είναι $f_4 = 0,3 - 0,1 = 0,2$

Επομένως $f_2\%=10\%$ και $f_4\%=20\%$

Γ.2

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης x_i	Σχετική συχνότητα f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i$
[8,10)	9	0,1	-5	25	2,5
[10,12)	11	0,1	-3	9	0,9
[12,14)	13	0,3	-1	1	0,3
[14,16)	15	0,2	1	1	0,2
[16,18)	17	0,3	3	9	2,7
Σύνολο	-	1	-	-	6,6

Διακύμανση → $S^2 = \sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = 6,6$

Τυπική απόκλιση → $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{6,6} \simeq 2,57$

Συντελεστής μεταβολής → $CV = \frac{S}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} = 0,1835 = 18,35\%$

Επειδή CV > 10% το δείγμα ΔΕΝ είναι ομοιογενές

Γ.3

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780 + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + \frac{x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{v} + x_5 f_5 \Leftrightarrow 14 = \frac{1780}{v} + 17 \cdot 0,3 \Leftrightarrow$$

$$14 = \frac{1780}{v} + 5,1 \overset{\cdot 10}{\Leftrightarrow} 140 = \frac{17800}{v} + 51 \Leftrightarrow$$

$$\frac{17800}{v} = 140 - 51 \Leftrightarrow \frac{17800}{v} = 89 \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{17800}{89} \Leftrightarrow v = 200 \rightarrow$$ το πλήθος των παρατηρήσεων του δείγματος

Γ.4 Για τις παρατηρήσεις $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ (διαφορετικές μεταξύ τους) τυχαία επιλεγμένες από το παραπάνω δείγμα, δίνεται ότι έχουν:

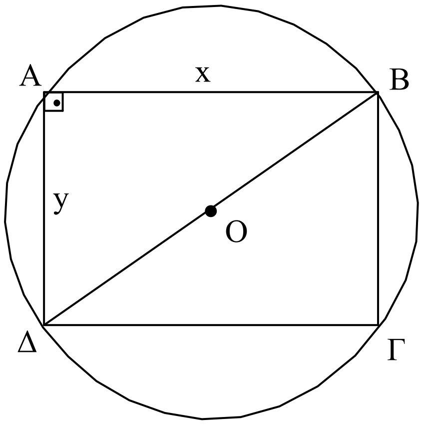
- Μέση τιμή → $\bar{\alpha}$
- Τυπική απόκλιση → S_α (είναι $S_\alpha>0$ αφού οι $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους)

Για τις παρατηρήσεις $\beta_i = \frac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha} = \frac{1}{S_\alpha} \cdot \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha}$

Όπου i=1,2,3,4,5 ισχύει ότι έχουν:

- Μέση τιμή → $\bar{\beta} = \frac{1}{S_\alpha} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{S_\alpha} = 0$
- Τυπική απόκλιση → $S_\beta = \left|\frac{1}{S_\alpha}\right| \cdot S_\alpha = \frac{S_\alpha}{S_\alpha} = 1$

ΘΕΜΑ Δ



Δ.1 Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι διάμετροι του κύκλου (Ο,ρ) άρα ΒΔ=2ρ=10. Για τις διαστάσεις x=AB=ΓΔ, y=AΔ=ΒΓ του ορθογωνίου ισχύει $0<x<2\rho$, $0<y<2\rho$

άρα $0<x<10$, $0<y<10$

Από πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει

$$AB^2+A\Delta^2=B\Delta^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2=10^2 \Leftrightarrow$$
$$y^2=100-x^2 \Leftrightarrow$$
$$y=\sqrt{100-x^2} \ , \ 0<x<10$$

Άρα το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=x\cdot y=x\sqrt{100-x^2} \ , \ 0<x<10$$

Δ.2

$$f'(x)=(x)'\cdot\sqrt{100-x^2}+x\cdot\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=$$
$$=\sqrt{100-x^2}+x\cdot\frac{\left(100-x^2\right)'}{2\sqrt{100-x^2}}=$$
$$=\sqrt{100-x^2}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}}=$$
$$=\frac{\sqrt{100-x^2}^{\,2}-x^2}{\sqrt{100-x^2}}=\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Άρα $f'(x)=\dfrac{2(50-x^2)}{\sqrt{100-x^2}}$, $0<x<10$

όπου $\dfrac{2}{\sqrt{100-x^2}}>0$, $\forall\ x\in(0,10)$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow 50-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=50 \Leftrightarrow$

$$x=\begin{cases}5\sqrt{2} & \text{Δεκτό}\\ -5\sqrt{2} & \text{Απορρ.}\end{cases} \quad (\text{αφού } 0<x<10)$$

- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 50 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5\sqrt{2}$

x	0		$5\sqrt{2}$		10
f'	‖	$+$	0	$-$	‖
f	‖	$\nearrow$		$\searrow$	‖
			ΟΛ. ΜΕΓ.		

Η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα $(0,5\sqrt{2}]$ και γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $\left[5\sqrt{2},10\right)$. Άρα το εμβαδόν f(x) μεγιστοποιείται όταν $x = 5\sqrt{2}$ και τότε είναι $y = \sqrt{100 - x^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ δηλαδή τότε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς $x = 5\sqrt{2}$.

Δ.3
- $f(1) = 1 \cdot \sqrt{100 - 1} = \sqrt{99}$
- $f'(1) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x) - f(1)}{x}$

Άρα από τη σχέση $f'(x) = \dfrac{2(50 - x^2)}{\sqrt{100 - x^2}}$, $0 < x < 10$

είναι $f'(1) = \dfrac{2 \cdot 49}{\sqrt{99}} = \dfrac{98}{\sqrt{99}} = \dfrac{98 \cdot \sqrt{99}}{99}$

Επομένως:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{98 \cdot x} =$$
$$= \frac{1}{98} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = \frac{1}{98} \cdot f'(1) =$$
$$= \frac{1}{\cancel{98}} \cdot \frac{\cancel{98}\sqrt{99}}{99} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

Δ.4 Είναι $A - B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) \le P(A) \le 1$
κι αφού δίνεται ότι $P(A - B) > 0$ ισχύει

- $0 < P(A - B) \le P(A) \le 1 \overset{f \nearrow (0,1] \subseteq \left(0,5\sqrt{2}\right]}{\Rightarrow}$
  $f(P(A - B) \le f(P(A)) \Rightarrow$
  $P(A - B) \cdot \sqrt{100 - P^2(A - B)} \subseteq P(A) \cdot \sqrt{100 - P^2(A)}$ (1)
- $0 < P(A - B) \le 1 \Rightarrow 0 < P^2(A - B) \le 1 \Rightarrow \sqrt{100 - P^2(A - B)} > 0$
- $0 < P(A - B) \le P(A) \le 1 \Rightarrow 0 < P^2(A) \le 1 \Rightarrow \sqrt{100 - P^2(A)} > 0$

Άρα από (1) διαιρώντας με $\sqrt{100-P^2(A-B)}\cdot\sqrt{100-P^2(A)}$ που είναι θετικός, ισχύει:

$$\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\quad(2)$$

Ισχύουν τα εξής:

$$0<P(A-B)\le P(A)\le 1\Rightarrow$$
$$0<P^2(A-B)\le P^2(A)\le 1\Rightarrow$$
$$0>-P^2(A-B)\ge -P^2(A)\ge -1\Rightarrow$$

$$-1\le -P^2(A)\le -P^2(A-B)<0\overset{+100}{\Rightarrow}$$
$$99\le 100-P^2(A)\le 100-P^2(A-B)<100\Rightarrow$$
$$9<\sqrt{99}\le\sqrt{100-P^2(A)}\le\sqrt{100-P^2(A-B)}<10$$

Άρα από (2) ισχύει:

$$0<\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\le\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}<1\overset{f\nearrow(0,1]}{\Rightarrow}$$
$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right)\le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Αλεξοπούλου Βιβή
Άννινος Δημήτρης
Μαρκάτος Διονύσης
Μαστοράκος Παναγιώτης