ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι
ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνεχούς συνάρτησης f είναι οι εξής:

- Τα άκρα κλειστών διαστημάτων που αποτελούν το πεδίο ορισμού της f
- Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία δεν υπάρχει η παράγωγος της f. Τα σημεία αυτά καλούνται **γωνιακά σημεία** της f
- Τα εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού της f στα οποία υπάρχει η παράγωγος της f και είναι ίση με το μηδέν. Τα σημεία αυτά καλούνται **στάσιμα σημεία** της f.

Τα γωνιακά και τα στάσιμα σημεία της f λέγονται **κρίσιμα σημεία** της f

Α.2
α. Λ
β. Σ
γ. Λ
δ. Λ
ε. Σ

Α.3 **α.** $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{x}dx = \left[\ell n|x|\right]_{\alpha}^{\beta} = \ell n\beta - \ell n\alpha$, με β > α > 0

β. (c)΄ = 0 , c σταθερά

γ. $\bar{x} = \frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_\kappa v_\kappa}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i}{v}$, όπου $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_\kappa$

ΘΕΜΑ Β

Β.1

Χρόνος σε λεπτά	Κέντρο κλάσης κ_i	Συχνότητα v_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	$\kappa_i \cdot v_i$	$\kappa_i - \bar{x}$	$(\kappa_i - \bar{x})^2$	$(\kappa_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
[5,15)	**10**	20	**20**	**200**	**-10**	**100**	**2000**
[15,25)	**20**	**14**	34	**280**	**0**	**0**	**0**
[25,35)	**30**	12	**46**	**360**	**10**	**100**	**1200**
[35,45)	**40**	**4**	**50**	**160**	**20**	**400**	**1600**
Σύνολα		v=50		**1000**			**4800**

- $N_2 = v_1 + v_2 \Leftrightarrow 34 = 20 + v_2 \Leftrightarrow v_2 = 14$
- $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v \Leftrightarrow 20 + 14 + 12 + v_4 = 50 \Leftrightarrow v_4 = 4$
- $N_1 = v_1 = 20,\ N_3 = N_2 + v_3 = 34 + 12 = 46,\ N_4 = v = 50$

Β.2 Μέσος χρόνος → $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \kappa_i v_i}{v} = \dfrac{1000}{50} = 20$ λεπτά

Β.3 Διακύμανση → $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} \left(\kappa_i - \bar{x}\right)^2 \cdot v_i}{v} = \dfrac{4800}{50} = 96$

Τυπική απόκλιση → $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{96} \simeq 10$

Β.4 Συντελεστής μεταβλητότητας → $CV = \dfrac{S}{|\bar{x}|} \cdot 100\% = \dfrac{1\cancel{0}}{2\cancel{0}} \cdot 100\% = \dfrac{1}{2} \cdot 100\% = 50\%$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & ,\ \text{αν } x > 2 \\ 4x + 4e^{x-2} & ,\ \text{αν } x \le 2 \end{cases} ,\ \lambda \in R^*$$

Γ.1 $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \left(4x + 4 \cdot e^{x-2}\right) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^0 = 8 + 4 = 12$

Γ.2 $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^3 - 2^3}{\lambda \cdot (x - 2)} =$

$= \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{\cancel{(x-2)}\left(x^2 + 2x + 4\right)}{\lambda \cdot \cancel{(x-2)}} = \dfrac{4 + 4 + 4}{\lambda} = \dfrac{12}{\lambda}$

Γ.3 Για να είναι η f συνεχής στο x_o=2 πρέπει να ισχύει $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$

Είναι $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 12$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \dfrac{12}{\lambda}$, $f(2) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot e^0 = 12$

Άρα η f είναι συνεχής στο x_o=2 όταν ισχύει

$$\frac{12}{\lambda} = 12 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Γ.4 Για λ=1 είναι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4\ , & x>2 \\ 4x+4e^{x-2} & ,\ x\le 2 \end{cases}$

Για κάθε $x\in[1,2]$ είναι $f(x)=4x+4e^{x-2}$, άρα f συνεχής στο διάστημα αυτό ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων 4x (πολυωνυμική)

και $4\cdot e^{x-2}$ που είναι γινόμενο των συνεχών 4(σταθερή) και e^{x-2} ως σύνθεση των συνεχών $\left\langle \begin{matrix} x-2 & \text{πολυωνυμική} \\ e^x & \text{εκθετική} \end{matrix} \right.$

Άρα $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2\left(4x+4\cdot e^{x-2}\right)dx=$

$$=\left[2x^2+4\cdot e^{x-2}\right]_1^2=\left(2\cdot 2^2+4\cdot e^{2-2}\right)-\left(2\cdot 1^2+4\cdot e^{1-2}\right)=$$

$$=\left(8+4\cdot 1\right)-\left(2+4\cdot e^{-1}\right)=12-2-4\cdot e^{-1}=$$

$$=10-\frac{4}{e}$$

ΘΕΜΑ Δ

Βάρος παγόβουνου σε τόνους μετά από χρόνο t έτη

$$B(t)=-\frac{t^3}{3}+2t^2+12t+15\ ,\quad 0\le t\le 10$$

Δ.1 Ρυθμός μεταβολής βάρους

$$B'(t)=-t^2+4t+12 \quad \text{τόνοι / έτος}\ ,\quad 0\le t\le 10$$

Δ.2 $B'(t)=0 \Leftrightarrow -t^2+4t+12=0 \Leftrightarrow t=\left\langle \begin{matrix} -2 & \text{Απορ.} \\ 6 & \text{Δεκτό} \end{matrix} \right.$

$\left(\text{αφού } 0\le t\le 10\right)$

$B'(t)>0 \Leftrightarrow -t^2+4t+12=0 \Leftrightarrow 0<\tau<6$

t	0		6		10
B'(t)		+	0	−	
B(t)		↗		↘	
			ΜΕΓΙΣΤΟ		

Η συνάρτηση B(t) είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα [0,6] και γνήσια φθίνουσα στο διάστημα [6,10]

Άρα το βάρος B(t) του παγόβουνου μεγιστοποιείται τη χρονική στιγμή t=6 έτη.

Δ.3 Αν $t \in [6,9]$ δηλαδή $6 \le t \le 9 \overset{B(t)\ \searrow\ \text{στο}\ [6,10]}{\Rightarrow}$

$$B(6) \ge B(t) \ge B(9) \Rightarrow$$
$$B(9) \le B(t) \le B(6)$$

Δ.4 $B'(t) = -t^2 + 4t + 12 \quad , 0 \le t \le 10$

$B''(t) = -2t + 4 \quad , 0 \le t \le 10$

$B''(t) = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 = 0 \Leftrightarrow -2t = -4 \Leftrightarrow t = 2$

$B''(t) > 0 \Leftrightarrow -2t + 4 > 0 \Leftrightarrow -2t > -4 \Leftrightarrow t < \dfrac{-4}{-2} \Leftrightarrow t < 2$

t	0		2		10
B''(t)		+	0	−	
B'(t)		↗		↘	
			ΜΕΓΙΣΤΟ		

Ο ρυθμός μεταβολής Β΄(t) του βάρους του παγόβουνου είναι συνάρτηση γνήσια αύξουσα στο διάστημα [0,2] και γνήσια φθίνουσα στο διάστημα [2,10]. Άρα ο ρυθμός μεταβολής Β΄(t) μεγιστοποιείται τη χρονική στιγμή t=2 έτη.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Αλεξοπούλου Βιβή
Άννινος Δημήτρης
Μαρκάτος Διονύσης
Μαστοράκος Παναγιώτης