ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α.3 Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α.4 α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Λ, ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} =$

> Πρέπει: $x^2+x+1\geq 0$ που ισχύει $\forall x\in R$ (αφού Δ<0)
> και
> $x^3+x^2\neq 0 \Leftrightarrow x^2\cdot(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0$ και $x\neq -1$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x+\cancel{1}-\cancel{1}}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{x^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1\cdot\left(\sqrt{1-\cancel{1}+\cancel{1}}+1\right)} = \frac{1}{4}, \quad \text{άρα } P(\omega_1) = \frac{1}{4}$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f στο x είναι το

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x\cdot \ln x)'=\frac{1}{3}\big((x)'\cdot \ln x+x(\ln x)'\big)=$$
$$=\frac{1}{3}\left(\ln x+\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right)=\frac{1}{3}(\ln x+1),x>0$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της f στο x=1 είναι

$$f'(1)=\frac{1}{3}(\ln 1+1)=\frac{1}{3},\ \text{άρα}\ \ P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}$$

B.2 $A=\{\omega_1,\omega_4\}$ $\qquad$ $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

Θέλω να δείξω ότι:

$\frac{1}{3}\le P(A')$ $\qquad$ ΚΑΙ $\qquad$ $P(A')\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3}\le P(\omega_2)+P(\omega_3)\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{3}\le P(\omega_2)+\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$
$0\le P(\omega_2)$ που ισχύει

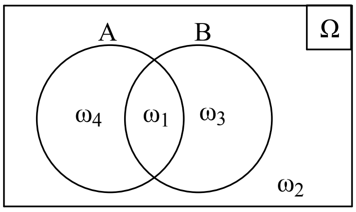
$$1-P(A)\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow$$
$$1-\frac{3}{4}\le P(A)\Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{4}\le P(\omega_1)+P(\omega_4)\Leftrightarrow$$
$$\cancel{\frac{1}{4}}\le\cancel{\frac{1}{4}}+P(\omega_4)\Leftrightarrow$$
$0\le P(\omega_4)$ που ισχύει

B.3 $P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow$

$$P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}$$
$$P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{9}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$$

- $P(\omega_4)=1-P(\omega_1)-P(\omega_2)-P(\omega_3)=1-\frac{1}{4}-\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=$

$$=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{5}{12}-\frac{4}{12}=0$$



$A \cap B = \{\omega_1\}$

$A - B = \{\omega_4\}$, $B - A = \{\omega_3\}$

$(A - B) \cup (B - A) = \{\omega_3, \omega_4\}$

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$ άρα $A' - B' = \{\omega_3\}$

άρα $P(A' - B') = P(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Αν c το πλάτος κάθε κλάσης τότε ισχύει ότι

$$x_4 = 50 + 3c + \frac{c}{2} \Leftrightarrow 85 = 50 + 3c + \frac{c}{2} \Leftrightarrow$$

$$35 = 3c + \frac{c}{2} \Leftrightarrow 70 = 6c + c \Leftrightarrow 70 = 7c \Leftrightarrow c = 10$$

Γ.2 Οι 4 κλάσεις της κατανομής είναι [50,60), [60,70), [70,80), [80,90)
Αφού η αθροιστική σχετική συχνότητα F_i της διαμέσου είναι 0,50 και δίνεται ότι η διάμεσος είναι $\delta = 75 = x_3$ (το κέντρο της $3^{ης}$ κλάσης) ισχύει ότι

$$f_1 + f_2 + \frac{1}{2} \cdot f_3 = 0{,}50 \quad (1)$$

Δίνεται ότι $f_4 = 2f_3$ και αφού $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow$

$$f_1 + f_2 + f_3 + 2f_3 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 3f_3 = 1 \ (2)$$

Αφού η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 74 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 74 \Leftrightarrow$

$$x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 f_4 = 74 \Leftrightarrow$$
$$55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot f_4 = 74 \Leftrightarrow$$
$$55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot f_3 + 85 \cdot 2 \cdot f_3 = 74 \Leftrightarrow$$
$$55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 245 \cdot f_3 = 74 \quad (3)$$

- Από (2) ισχύει: $f_1 + f_2 = 1 - 3f_3$

  άρα από (1) έχουμε: $1 - 3f_3 + \dfrac{1}{2} f_3 = 0{,}50 \Leftrightarrow$

  $$3f_3 - \frac{1}{2} f_3 = 0{,}50 \Leftrightarrow 6f_3 - f_3 = 1 \Leftrightarrow 5f_3 = 1 \Leftrightarrow$$

  $f_3 = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$, άρα $f_4 = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$

Άρα $f_1 + f_2 = 1 - 3 \cdot f_3 = 1 - 3 \cdot 0,2 = 1 - 0,6 = 0,4$

$f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$

Από (3) ισχύει: $55f_1 + 65 \cdot (0,4 - f_1) + 245 \cdot 0,2 = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1 + 26 - 65f_1 + 49 = 74 \Leftrightarrow 10 \cdot f_1 = 1 \Leftrightarrow$

$f_1 = \frac{1}{10} = 0,1$ άρα $f_2 = 0,4 - f_1 = 0,4 - 0,1 = 0,3$

Κλάσεις	**Κεντρική τιμή x_i**	**Σχετική συχνότητα f_i**	**$x_i f_i$**
[50,60)	55	0,1	5,5
[60,70)	65	0,3	19,5
[70,80)	75	0,2	15
[80,90)	85	0,4	34
Σύνολο	-	1	$\sum_{i=1}^{4} x_i f_i = 74 = \bar{x}$

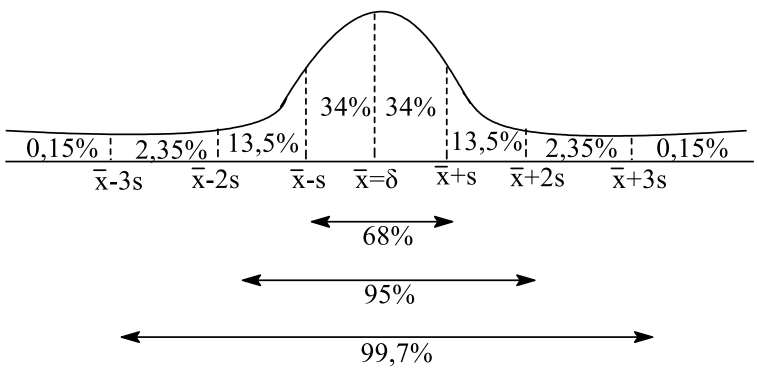
Γ.3 Οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80, είναι όλες οι παρατηρήσεις της κατανομής που ανήκουν στις 3 πρώτες κλάσεις. Αν v_1, v_2, v_3 οι αντίστοιχες συχνότητες των κλάσεων αυτών ισχύει ότι η μέση τιμή $\bar{x}'$ των παρατηρήσεων αυτών είναι

$$\bar{x}' = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{\frac{x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3}{v}}{\frac{v_1 + v_2 + v_3}{v}} = \frac{\frac{x_1 v_1}{v} + \frac{x_2 v_2}{v} + \frac{x_3 v_3}{v}}{\frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + \frac{v_3}{v}} =$$

$$= \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3}{f_1 + f_2 + f_3} = \frac{5,5 + 19,5 + 15}{0,6} = \frac{40}{0,6} =$$

$$= \frac{20}{0,3} = \frac{200}{3}$$

Γ.4 κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με κ< ν ακολουθούν την κανονική κατανομή.



- Το 2,5%=0,15% + 2,35% των παρατηρήσεων αυτών είναι τουλάχιστον 74, άρα $\bar{x}+2s=74$.
- Το 16%=0,15% + 2,35% +13,5% των παρατηρήσεων αυτών είναι το πολύ 68 άρα $\bar{x}-s=68$.

Σύστημα $\left\{\begin{array}{l}\bar{x}+2s=74\\ \bar{x}-s=68\end{array}\right\} \overset{-}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}3s=6\\ \bar{x}-s=68\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}s=2\\ \bar{x}=70\end{array}\right.$

Άρα η μέση τιμή των παρατηρήσεων αυτών είναι $\bar{x}=70$ και η τυπική απόκλιση s=2.

Συντελεστής μεταβολής $CV=\dfrac{s}{|\bar{x}|}=\dfrac{2}{70}=\dfrac{1}{35}<\dfrac{1}{10}$

Επομένως το CV δεν ξεπερνάει το 10%, άρα το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 $f(x)=x\cdot\ln x+\kappa,\quad x>0,\ \kappa$ ακέραιος, $\kappa>1$

$f'(x)=(x)'\ln x+x\cdot(\ln x)'=\ln x+x\dfrac{1}{x}=\ln x+1,\quad x>0$

Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της (1,f(1)) έχει εξίσωση

$$\begin{array}{l|l} y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow & \cdot\ f(1)=1\ln 1+\kappa=\kappa \\ y-\kappa=1(x-1)\Leftrightarrow & \cdot\ f'(1)=\ln 1+1=1 \\ (\varepsilon): y=x+(\kappa-1) & \end{array}$$

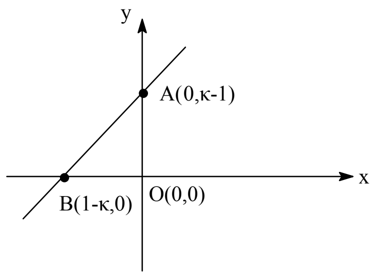
Η εξίσωση της (ε) για x=0 δίνει y=κ-1 και για y=0 δίνει $0=x+\kappa-1\Leftrightarrow x=1-\kappa$

(όπου κ>1 άρα κ-1>0, 1-κ<0)

Άρα η εφαπτομένη (ε) τέμνει τους άξονες στα σημεία A(0,κ-1) και B(1-κ,0).

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι

$E=\dfrac{(OA)\cdot(OB)}{2}=\dfrac{|\kappa-1||1-\kappa|}{2}=\dfrac{|\kappa-1|^2}{2}$



Δίνεται ότι $E<2\Leftrightarrow$

$\dfrac{|\kappa-1|^2}{2}<2\Leftrightarrow|\kappa-1|^2<4\Leftrightarrow$

$|\kappa-1|^2<2^2\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\overset{\kappa>1}{\Leftrightarrow}$

$\kappa-1<2\Leftrightarrow\kappa<3$

κι αφού κ ακέραιος με κ>1 ισχύει 1< κ < 3 άρα κ=2.

Δ.2 α. Αφού κ=2 η εξίσωση της (ε) είναι y=x+1

Δίνονται 50 σημεία (x_1,y_1), (x_2,y_2),…,(x_{50},y_{50}) της (ε), άρα $y_i=x_i+1$, i=1,2,…,50.

Αν $\bar{x}$ η μέση τιμή των x_i και $\bar{y}=31$ η μέση τιμή των y_i, τότε ισχύει

$$\bar{y}=\bar{x}+1 \Leftrightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$$

β. Για τις παρατηρήσεις z_i, i=1,2,…,50 έχουμε

$$z_i=\begin{cases} x_i+3, & \text{για } i=1,2,...,20 \\ x_i, & \text{για } i=21,22,...,35 \\ x_i-\lambda, & \text{για } i=36,37,...,50 \end{cases}$$

$$(\text{όπου } \lambda>0)$$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων z_i είναι

$$\bar{z}=\frac{\sum_{i=1}^{50} z_i}{50}=\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i+20\cdot 3-15\cdot\lambda}{50}=$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}=\bar{x}+\frac{\cancel{5}(12-3\lambda)}{\cancel{50}_{10}}$$

$$=30+\frac{12-3\lambda}{10}$$

Δίνεται ότι $\bar{z}=31 \Leftrightarrow 30+\dfrac{12-3\lambda}{10}=31 \Leftrightarrow$

$$\frac{12-3\lambda}{10}=1 \Leftrightarrow 12-3\lambda=10 \Leftrightarrow 3\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$$

Δ.3 $f(x)=x\cdot\ln x+2,\ x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\ln x+1 \quad ,\ x\in(0,+\infty)$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e^{-1} \Leftrightarrow x>e^{-1} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$

x	0		$e^{-1}=\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	ΕΛΑΧΙΣΤΟ	↗	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$.

Η f παρουσιάζει στη θέση $x=\frac{1}{e}$ ΟΛ. ΕΛΑΧΙΣΤΟ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}$

- Αφού $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e \overset{f\nearrow\left[\frac{1}{e},+\infty\right)}{\Rightarrow}$

  $$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

  όπου $f\left(\frac{1}{e}\right)=2-\frac{1}{e}>0$ και $f(e)=e\cdot\ln e+2=e+2$

  και αφού $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ ισχύει $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$

  Άρα ισχύει ότι οι παρατηρήσεις f(α), f(β), f(γ), f(e), $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ σε αύξουσα σειρά είναι

  $$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

  άρα το εύρος τους είναι:

  $$R=\begin{pmatrix}\max\\ \text{παρατήρηση}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\min\\ \text{παρατήρηση}\end{pmatrix}$$

  $$R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$$

  και η μέση τιμή τους είναι

  $$\bar{x}=\frac{f'\left(\frac{1}{e}\right)+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5}=$$

  $$=\frac{0+\alpha\cdot\ln\alpha+2+\beta\cdot\ln\beta+2+\gamma\cdot\ln\gamma+2+e+2}{5}=$$

  $$=\frac{\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+e+8}{5}=\frac{\ln(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma})+e+8}{5}$$

  $$=\frac{\ln e^{7}+e+8}{5}=\frac{7\cdot\ln e+e+8}{5}=\frac{7+e+8}{5}=\frac{e+15}{5}$$

Δ.4 Δειγματικός χώρος

$$\Omega=\left\{t_n,\ n=1,2,3,...30:0<t_1<t_2<...<t_{10}<\frac{1}{e}<t_{11}<...<t_{30}=1\right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα

α) Το ενδεχόμενο Α πραγματοποιείται όταν ισχύει $f'(t)>0 \overset{\Delta.3}{\Leftrightarrow} t>\frac{1}{e}$

άρα A=$\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$ κι αφού τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοπίθανα ισχύει

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$$

β) Το ενδεχόμενο Β πραγματοποιείται όταν ισχύει

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow$

$t \cdot \ln t + \cancel{2} > \ln t + \cancel{1} + \cancel{1} \Leftrightarrow$

$t \cdot \ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow$

$\ln t \cdot (t-1) > 0, \;\; t \in (0,+\infty)$

t	0		1		$+\infty$
$\ln t$		$-$	0	$+$	
$t-1$		$-$	0	$+$	
$\ln t \cdot (t-1)$		$+$	0	$+$	

- $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$
- $\ln t = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Άρα $\ln t \cdot (t-1) > 0 \Leftrightarrow t \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

Άρα $B = \{t_1, t_2, t_3, ..., t_{29}\}$

Ενδεχόμενο $A \cap B$: « τα Α,Β πραγματοποιούνται συγχρόνως»

$A \cap B = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{29}\}$

$$P(A \cap B) = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \frac{19}{30}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ:
ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ