ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ
(ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεώρημα σελίδα 253 στο σχολικό βιβλίο
Α.2 Ορισμός σελίδα 191 στο σχολικό βιβλίο
Α.3 Ορισμός σελίδα 258 στο σχολικό βιβλίο
Α.4 α) Σωστό β) Σωστό γ) Λάθος δ) Λάθος ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Ισχύει $|z-1|^2+|z+1|^2=4 \Leftrightarrow$

$$(z-1)\cdot(\bar{z}-1)+(z+1)\cdot(\bar{z}+1)=4 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}-\cancel{z}-\cancel{\bar{z}}+1+z\bar{z}+\cancel{z}+\cancel{\bar{z}}+1=4 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2+1+|z|^2+1=4 \Leftrightarrow$$

$$2|z|^2=2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2=1 \Leftrightarrow$$

$|z|=1$, άρα ο γ.τ των εικόνων των μιγαδικών z είναι ο κύκλος κέντρου Ο(0,0) κι ακτίνας ρ=1

Β.2 Αν οι z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς ισχύει $|z_1|=|z_2|=1$.

Δίνεται ότι $|z_1-z_2|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2 \Leftrightarrow (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2 \Leftrightarrow$

$$z_1\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+z_2\bar{z}_2=2 \Leftrightarrow |z_1|^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+|z_2|^2=2 \Leftrightarrow$$

$$\cancel{1}-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2+\cancel{1}=\cancel{2} \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=0$$

Είναι $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+\underbrace{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2}_{0}+z_2\bar{z}_2=$

$=|z_1|^2+|z_2|^2=1+1=2$. Αφού $|z_1+z_2|^2=2$ και $|z_1+z_2|\geq 0$

Ισχύει $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$

Β.3 Έστω $w = x + yi$ με $x, y \in R$

Ισχύει $\left|w - 5\overline{w}\right| = 12 \Leftrightarrow \left|x + yi - 5\left(x - yi\right)\right| = 12 \Leftrightarrow$

$\left|x + yi - 5x + 5yi\right| = 12 \Leftrightarrow \left|-4x + 6yi\right| = 12 \Leftrightarrow$

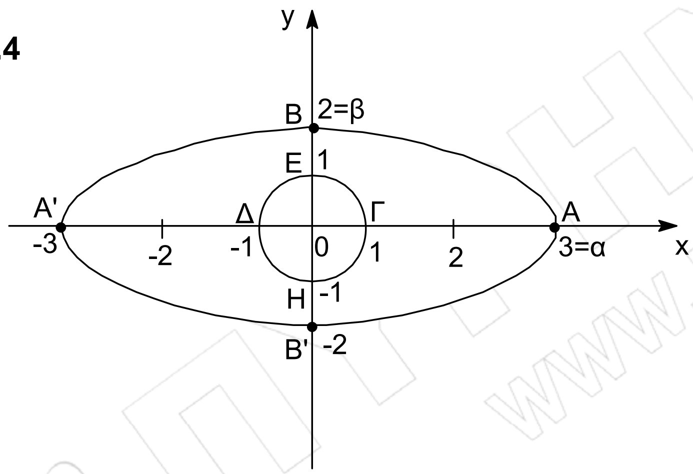
$\sqrt{\left(-4x\right)^2 + \left(6y\right)^2} = 12 \Leftrightarrow 16x^2 + 36y^2 = 144 \overset{:144}{\Leftrightarrow}$

$\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι η έλλειψη $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, η οποία έχει μεγάλο άξονα $2\alpha = 2 \cdot 3 = 6$ και μικρό άξονα $2\beta = 2 \cdot 2 = 4$ και τις εστίες της στον άξονα x′x

- Μέγιστη τιμή του |w| είναι $|w|_{max} = \alpha = 3$
- Ελάχιστη τιμή του |w| είναι $|w|_{min} = \beta = 2$

Β.4



α' τρόπος:

$\left|z - w\right|_{max} = \left(\text{ΑΔ}\right) = \left(\text{Α'Γ}\right) = 3 + 1 = 4$

$\left|z - w\right|_{min} = \left(\text{ΒΕ}\right) = \left(\text{Β'Η}\right) = 2 - 1 = 1$

Άρα ισχύει $1 \le \left|z - w\right| \le 4$

β' τρόπος: Τριγωνική ανισότητα $\left||z| - |w|\right| \le |z - w| \le |z| + |w|$

όπου |z|=1 άρα ισχύει $\left||w| - 1\right| \le |z - w| \le |w| + 1$ **(1)**

Από Β.3 ισχύει $2 \le |w| \le 3$

άρα έχουμε $1 \le |w| - 1 \le 2$ και $3 \le |w| + 1 \le 4$

Άρα λόγω της (1) ισχύει:

$1 \le |w| - 1 = \left||w| - 1\right| \le |z - w| \le |w| + 1 \le 4$

Επομένως $1 \le |z - w| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\cdot\ln x-1$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα συνεχής) στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(x-1\right)'\cdot\ln x+\left(x-1\right)\cdot\left(\ln x\right)'=\ln x+\frac{x-1}{x}=\ln x+1-\frac{1}{x}$$

Προφανής ρίζα της f′ είναι το x=1 $\left(f'(1)=\cancel{\ln 1}^{0}+1-1=0\right)$ και αφού

$$f''(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0,\forall x\in(0,+\infty)$$

Ισχύει ότι η f′ είναι $\nearrow$ στο $\left(0,+\infty\right)$, άρα f' 1-1, άρα η ρίζα x=1 της f′ είναι μοναδική σε όλο το $\left(0,+\infty\right)$

- Για κάθε x>1 $\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(1)\Rightarrow f'(x)>0$ και αφού f συνεχής στο $[1,+\infty)$ ισχύει ότι η f είναι $\nearrow$ στο $[1,+\infty)$
- Για κάθε $x\in(0,1)$ δηλαδή $0<x<1$ $\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(1)\Rightarrow f'(x)<0$ και αφού f συνεχής στο διάστημα (0,1] ισχύει ότι f $\searrow$ στο (0,1]

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	—	ο	+	
f	‖	$\searrow$		$\nearrow$	
			ΟΛ.ΕΛ **f(1)=-1**		

Άρα η f παρουσιάζει στη θέση x_o=1 ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ και f_{min}=f(1)=-1 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

- Στο διάστημα Δ_1=(0,1] η f είναι συνεχής και $\searrow$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών το $f(\Delta_1)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$

αφού $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(x-1\right)\cdot\ln x-1\right]=-1\cdot\left(-\infty\right)-1=\left(+\infty\right)-1=+\infty$

- Στο διάστημα Δ_2=[1,+∞) η f είναι συνεχής και $\nearrow$, άρα έχει αντίστοιχο σύνολο τιμών $f(\Delta_2)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-1,+\infty\right)$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x-1\right)\cdot\ln x-1\right]=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)-1=\left(+\infty\right)-1=+\infty$

Το σύνολο τιμών της f είναι $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)=[-1,+\infty)$

Γ.2 Εξίσωση $x^{x-1} = e^{2013}$, $x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow$

$$\ln x^{x-1} = \ln e^{2013} \Leftrightarrow$$
$$(x-1)\cdot \ln x = 2013 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)\cdot \ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow$$
$$f(x) = 2012, \quad x \in (0,+\infty)$$

Αφού $2012 \in f(\Delta_1) = [-1,+\infty)$ και $2012 \in f(\Delta_2) = [-1,+\infty)$
με $f(1) \neq 2012$ (αφού f(1)=-1) και f $\searrow$ στο διάστημα Δ_1=(0,1],
f $\nearrow$ στο Δ_2=[1,+∞), ισχύει ότι η εξίσωση f(x)=2012 έχει ακριβώς μία ρίζα $x_1 \in (0,1)$ και ακριβώς μία ρίζα $x_2 \in (1,+\infty)$,
Άρα η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1,x_2 με $0 < x_1 < 1 < x_2$.

Γ.3 Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f'(x) + f(x) - 2012$, $x \in (0,+\infty)$

- Στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq (0,+\infty)$ η g είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ των συνεχών f'(x), f(x) (επίσης πράξεις συνεχών καθεμία) και 2012(σταθερή)
- $g(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) + \cancel{2012} - \cancel{2012} = f'(x_1) < 0$
  αφού $x_1 \in (0,1)$ και $f'(x) < 0,\ \forall x \in (0,1)$
  $g(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) + \cancel{2012} - \cancel{2012} = f'(x_2) > 0$
  αφού $x_2 \in (1,+\infty)$ και $f'(x) > 0,\ \forall x \in (1,+\infty)$

Άρα ισχύει $g(x_1)\cdot g(x_2) < 0$, άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (x_1, x_2)$ ώστε $g(x_o) = 0 \Rightarrow f'(x_o) + f(x_o) = 2012$

β' τρόπος για το Γ.3

Εξίσωση
$$f'(x) + f(x) = 2012 \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow}$$
$$f'(x)\cdot e^x + f(x)\cdot e^x = 2012\cdot e^x \Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)\cdot e^x\right)' = \left(2012\cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$
$$\left(f(x)\cdot e^x - 2012\cdot e^x\right)' = 0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\left(f(x) - 2012\right)\cdot e^x\right]' = 0$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g = h(x) = \left(f(x) - 2012\right)\cdot e^x$, $x \in [x_1, x_2] \subseteq (0,+\infty)$

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο [x_1,x_2] (άρα και συνεχής) ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων f(x), e^x, 2012 και ισχύει
$$h'(x) = f'(x)\cdot e^x + \left(f(x) - 2012\right)\cdot e^x = \left(f'(x) + f(x) - 2012\right)\cdot e^x$$
- $$\left.\begin{aligned} h(x_1) &= \left(f(\cancel{x_1}) - \cancel{2012}\right)\cdot e^{x_1} = 0\cdot e^{x_1} = 0 \\ h(x_2) &= \left(f(\cancel{x_2}) - \cancel{2012}\right)\cdot e^{x_2} = 0\cdot e^{x_2} = 0 \end{aligned}\right\} h(x_1) = h(x_2)$$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (x_1, x_2)$ ώστε $h'(x_o) = 0 \Leftrightarrow$

$$\left(f'(x_o)+f(x_o)-2012\right)\cdot e^{x_o}=0 \overset{:e^{x_o}>0}{\Leftrightarrow} f'(x_o)+f(x_o)-2012=0 \Leftrightarrow$$
$$f'(x_o)+f(x_o)=2012$$

Γ.4 Συνάρτηση $g(x)=f(x)+1=(x-1)\cdot\ln x,\ \ x\in(0,+\infty)$
Λύνω την εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot\ln x=0 \Leftrightarrow$
$x-1=0$ ή $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$
άρα η C_g τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο (1,0)

Η συνάρτηση $g(x)=(x-1)\cdot\ln x$ είναι συνεχής στο διάστημα [1,e] ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων x-1 (πολυωνυμική) και lnx (τριγωνομετρική). Για κάθε $x\in[1,e]$ ισχύει $x-1\geq 0$, $\ln x\geq 0$ άρα $g(x)=(x-1)\cdot\ln x\geq 0$, $\forall x\in[1,e]$.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_1^e|g(x)|dx=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e (x-1)\cdot\ln xdx=\int_1^e x\ln xdx-\int_1^e \ln xdx=$$
$$=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln xdx-\int_1^e(x)'\cdot\ln xdx=\left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx-\left[x\cdot\ln x\right]_1^e+\int_1^e\cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}dx=$$
$$=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\cancel{\ln 1}^0\right)-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e-\left(e\cdot\ln e-\cancel{\ln 1}^0\right)+\left(e-1\right)=$$
$$=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\cancel{e}+\cancel{e}-1=\frac{2e^2-e^2+1-4}{4}=\frac{e^2-3}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Δίνεται ότι για τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ ισχύει η σχέση

$$\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt\geq\frac{x-x^2}{e} \overset{\cdot e>0}{\Leftrightarrow}$$
$$e\cdot\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt\geq x-x^2 \Leftrightarrow$$
$$e\cdot\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt+x^2-x\geq 0,\quad \forall x\in(0,+\infty)\ \ \mathbf{(1)}$$

Η συνάρτηση $h(x)=\int_1^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, επειδή η f(t) είναι συνεχής συνάρτηση στο $(0,+\infty)$. Ισχύει $h'(x)=\left(\int_1^x f(t)dt\right)'=f(x)$, $\forall x\in(0,+\infty)$.

Άρα η συνάρτηση $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως σύνθεση των παραγωγίσιμων x^2-x+1 (πολυωνυμική) και h(x).

Άρα η συνάρτηση $g(x)=e\cdot\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt+x^2-x$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων e (σταθερή), $\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt$ και x^2-x (πολυωνυμική) και ισχύει

$$g'(x)=e\cdot\left(\int_1^{x^2-x+1}f(t)dt\right)'+\left(x^2-x\right)'=e\cdot f\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)'+2x-1=$$

$$=e\cdot f\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(2x-1\right)+\left(2x-1\right),\ x\in(0,+\infty)$$

Λόγω της **(1)** ισχύει $g(x)\geq 0,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$ δηλαδή $g(x)\geq g(1),\ \ \forall x\in(0,+\infty)$ $\left(g(1)=\int_1^1 f(t)dt+\cancel{1}-\cancel{1}=0\right)$. Άρα η g παρουσιάζει στο x_o=1 ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ και αφού επιπλέον το x_o=1 είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$ και g παραγωγίσιμη στο x_o=1, ισχύει από Θ.Fermat ότι

$$g'(1)=0\Leftrightarrow e\cdot f(1)+1=0\Leftrightarrow f(1)=-\frac{1}{e}$$

Αφού η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και $f(x)\neq 0,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$ ισχύει ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0,+\infty)$ (αν δεν ισχύει αυτό τότε υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ με $x_1<x_2$ ώστε $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$ και αφού f συνεχής στο $\left[x_1,x_2\right]\subseteq(0,+\infty)$ έχουμε από Θ. Bolzano ότι υπάρχει $x_o\in(x_1,x_2)$ ώστε $f(x_o)=0$ ΑΤΟΠΟ). Επομένως ισχύει $f(x)<0,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$ ή $f(x)>0,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$.

Αφού επιπλέον έχουμε $f(1)=-\frac{1}{e}$ δηλαδή f(1)<0, ισχύει ότι $f(x)<0,\ \ \forall x\in(0,+\infty)$.

Δίνεται ότι ισχύει $\ln x-x=-\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot\left|f(x)\right|,\ \forall x\in(0,+\infty)$, άρα αφού f(x)<0, $\forall x\in(0,+\infty)$ είναι $\left|f(x)\right|=-f(x),\ \forall x\in(0,+\infty)$ άρα είναι

$$\ln x-x=\left(\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot f(x)\ ,\ \ x\in(0,+\infty)\quad \textbf{(2)}$$

- Στο Δ.3 δίνεται ότι ισχύει η σχέση $\ln x\leq x-1,\ \ \forall x>0$ άρα ισχύει $\ln x-x\leq -1,\ \ \forall x>0$ κι αφού $f(x)<0,\ \ \forall x>0$ ισχύει λόγω της **(2)** ότι $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e>0\ ,\ \forall x\in(0,+\infty)$. Άρα από τη **(2)** έχουμε:

$$f(x)=\frac{\ln x-x}{\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e}\ ,\ \ x\in(0,+\infty)\quad \textbf{(3)}$$

  Η συνάρτηση $\frac{\ln t-t}{f(t)}$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ των συνεχών lnt, t, f(t), άρα η συνάρτηση $\int_1^x\frac{\ln t-t}{f(t)}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Άρα λόγω της **(3)** και η f(x) είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$\ln x$, x, $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt$, e.

Θεωρώ τη συνάρτηση φ(x)= $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$, $x \in (0,+\infty)$ όπου η φ(x) είναι παραγωγίσιμη στο (0,+∞) (σύμφωνα με τα παραπάνω).

Ισχύει φ'(x)= $\frac{\ln x - x}{f(x)}$, $x \in (0,+\infty)$.

Λόγω της **(2)** ισχύει: $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e, \ \forall x \in (0,+\infty) \Leftrightarrow$

$$\varphi'(x) = \varphi(x) \Leftrightarrow$$

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = 0 \overset{\cdot e^{-x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\varphi'(x)\cdot e^{-x} - \varphi(x)\cdot e^{-x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\varphi(x)\cdot e^{-x}\right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x)\cdot e^{-x} = c \overset{\cdot e^{x}}{\Leftrightarrow}$$

$$\varphi(x) = c\cdot e^{x} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e = c\cdot e^{x} \ , \ \forall x \in (0,+\infty)$$

άρα για x=1 ισχύει $0 + e = c\cdot e \Leftrightarrow c = 1$

Άρα $\varphi(x) = e^{x}$, $\forall x \in (0,+\infty)$

επομένως $\varphi'(x) = \left(e^{x}\right)' \Leftrightarrow$

$$\frac{\ln x - x}{f(x)} = e^{x} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{\ln x - x}{e^{x}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) = e^{-x}\cdot(\ln x - x) \quad , x \in (0,+\infty)$$

Δ.2

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[e^{-x}\cdot(\ln x - x)\right] = 1\cdot\left(-\infty - 0\right) = -\infty$

αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x} = e^{o} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f^2(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)} - f(x)\right] = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{u^2}\cdot ημu - \frac{1}{u}\right) =$

Θέτω $u=\dfrac{1}{f(x)}$ άρα $f(x)=\dfrac{1}{u}$ όπου f(x)<0, άρα u<0

Αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{f(x)}=0$, άρα $u\to 0^-$

$$=\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 0^-}\frac{(\eta\mu u-u)'}{(u^2)'}=\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{u\to 0^-}\frac{(\sigma\upsilon\nu u-1)'}{(2u)'}=\lim_{u\to 0^-}\frac{-\eta\mu u}{2}=-\frac{1}{2}\cdot\eta\mu 0=-\frac{1}{2}\cdot 0=0$$

Δ.3 Η συνάρτηση f(t) είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, άρα η συνάρτηση $F(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$, x>0 είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $F'(x)=f(x)<0$, άρα F ↘ στο $(0,+\infty)$.

Η συνάρτηση $F'(x)=f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, με

$$F''(x)=f'(x)=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1\right)=e^{-x}\left(\frac{1}{x}-1-\ln x+x\right)>0,\ \forall x\in(0,+\infty)$$

αφού $e^{-x}>0$, $\dfrac{1}{x}>0$ και δίνεται $\ln x\le x-1$ δηλαδή

$-1-\ln x+x\ge 0$, $\forall x\in(0,+\infty)$ άρα

$$F''(x)=\underset{>0}{e^{-x}}\cdot\left(\underset{>0}{\frac{1}{x}}\underbrace{-1-\ln x+x}_{\ge 0}\right)>0 \text{ , για κάθε } x>0$$

Άρα F' ↗ στο $(0,+\infty)$ και F κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Για κάθε x>0 ισχύει 0 < x < 2x < 3x. Ορίζω τα διαστήματα [x,2x], [2x,3x]. Σε καθένα από τα διαστήματα αυτά η F είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής), άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(x,2x)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(2x,3x)$

ώστε $F'(\xi_1)=\dfrac{F(2x)-F(x)}{2x-x}=\dfrac{F(2x)-F(x)}{x}$

$$F'(\xi_2)=\frac{F(3x)-F(2x)}{3x-2x}=\frac{F(3x)-F(2x)}{x}$$

Αφού $0<x<\xi_1<2x<\xi_2<3x\overset{F'\nearrow}{\Rightarrow}$

$$F'(\xi_1)<F'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\frac{F(2x)-F(x)}{x}<\frac{F(3x)-F(2x)}{x}\overset{\cdot x>0}{\Rightarrow}$$

$$F(2x)-F(x)<F(3x)-F(2x)\Rightarrow$$

$$2\cdot F(2x)<F(x)+F(3x),\quad \forall x>0$$

Δ.4 Θεωρώ τη συνάρτηση $K(x)=2F(x)-F(\beta)-F(3\beta)$, $x\in(0,+\infty)$ όπου δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β>0, άρα 0<β<2β. Στο διάστημα [β,2β] η συνάρτηση K(x) είναι συνεχής ως πράξεις μεταξύ της συνεχούς F(x) (ως παραγωγίσιμη) και των σταθερών 2, F(β), F(3β).

- K(β)=2F(β)-F(β)-F(3β)=F(β)-F(3β)>0

$$\left(0<\beta<3\beta\overset{F\searrow}{\Rightarrow}F(\beta)>F(3\beta)\Rightarrow F(\beta)-F(3\beta)>0\right)$$

- K(2β)=2F(2β)-F(β)-F(3β)<0 (από Δ.3 για x=β ισχύει $F(\beta)+F(3\beta)>2F(2\beta)$)

Άρα $K(\beta)\cdot K(2\beta)<0$, επομένως από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\beta,2\beta)$ ώστε $K(\xi)=0\Leftrightarrow 2F(\xi)-F(\beta)-F(3\beta)=0\Leftrightarrow 2F(\xi)=F(\beta)+F(3\beta)$

Αφού $K'(x)=\left(2\cdot F(x)-F(\beta)-F(3\beta)\right)'=2\cdot F'(x)=2f(x)<0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει K $\searrow$ σε όλο το (0,+∞), άρα K είναι 1-1, άρα το $\xi\in(\beta,2\beta)$ ώστε K(ξ)=0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης K(x)=0 σε όλο το (0,+∞).

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ

ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ ΒΙΒΗ

ΑΝΝΙΝΟΣ ΔΗΜΗΤΡΗΣ