# ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
# ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
# ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
# ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
# ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α.1** Απόδειξη στο σχολικό βιβλίο σελίδα 31.

**Α.2** Ορισμός σελίδα 148-149 στο σχολικό βιβλίο:
Σε ένα πείραμα με ν ισοπίθανα αποτελέσματα η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου με k στοιχεία θα τείνει στον αριθμό $\frac{k}{\nu}$. Ορίζουμε ως πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό

$$P(A)=\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{πλήθος δυνατών περιπτώσεων}}=\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει άμεσα ότι

$P(\Omega)=\frac{N(\Omega)}{N(\Omega)}=1$ , $P(\varnothing)=\frac{0}{N(\Omega)}$ και ότι για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει $0\le P(A)\le 1$

**Α.3** Ορισμός σελίδα 96 στο σχολικό βιβλίο:
Συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας CV μιας μεταβλητής Χ με μέση τιμή $\bar{x}>0$, λέγεται ο λόγος

$$CV=\frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}=\frac{S}{\bar{x}}$$

- Αν $\bar{x}<0$, τότε $CV=\frac{S}{|\bar{x}|}$

**Α.4** **α)** Λ **β)** Σ **γ)** Λ **δ)** Σ **ε)** Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β.1** Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από αυτήν. Αφού δίνεται ότι $F_2\%=50\%$ ισχύει ότι η διάμεσος δ είναι το δεξί άκρο της $2^{ης}$ κλάσης, δηλαδή δ=25.

**Β.2** Αφού $F_2\%=50\%$ ισχύει $f_1\% + f_2\% = 50\%$
άρα $f_3\% + f_4\% = 100\% - 50\% = 50\%$
άρα $v_1 + v_2 = v_3 + v_4 \Leftrightarrow$
$(α+4) + (3α – 6) = (2α + 8) + (α – 2) \Leftrightarrow$
$α + \cancel{4} + \cancel{3α} - \cancel{6} = \cancel{2α} + 8 + \cancel{α} - \cancel{2} \Leftrightarrow$
$α = 8$

Αφού α=8, ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

| **χρόνος σε min** | **κέντρο κλάσης $x_i$** | $v_i$ | $f_i\ \%$ | **Ni** | **Fi%** | $x_i v_i$ | $(x_i-\bar{x})^2$ | $(x_i-\bar{x})^2 \cdot v_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| [5,15) | 10 | 12 | 20 | 12 | 20 | 120 | 196 | 2352 |
| [15,25) | 20 | 18 | 30 | 30 | 50 | 360 | 16 | 288 |
| [25,35) | 30 | 24 | 40 | 54 | 90 | 720 | 36 | 864 |
| [35,45) | 40 | 6 | 10 | 60 | 100 | 240 | 256 | 1536 |
| Σύνολο | - | v=60 | 100 | - | - | $\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1440$ | - | 5040 |

**Β.3** Μέση τιμή $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{v} = \dfrac{144\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 24$

Διακύμανση $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \dfrac{504\cancel{0}}{6\cancel{0}} = 84$

Τυπική απόκλιση $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{84} \simeq 9{,}17$

**Β.4** Οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες.
Οι μαθητές οι οποίοι χρειάστηκαν χρόνο τουλάχιστον 37min ανήκουν στο διάστημα [37,45) της κλάσης [35,45). Αφού το πλάτος κάθε κλάσης είναι c=10, θέλουμε τα $\dfrac{45-37}{10}$ δηλαδή τα $\dfrac{8}{10}$ της κλάσης [35,45), άρα ποσοστό

$\dfrac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} \cdot f_4\% = \dfrac{4}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}}\% = 8\%$ των μαθητών.

## ΘΕΜΑ Γ

**Γ.1** **Ενδεχόμενο Γ:** «ο μαθητής μαθαίνει Γαλλικά»
**Ενδεχόμενο Ι:** «ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά»
**Ενδεχόμενο $\Gamma\cap I$:** «ο μαθητής μαθαίνει και τις δύο παραπάνω γλώσσες»
**Ενδεχόμενο $\Gamma\cup I$:** «ο μαθητής μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις δύο παραπάνω γλώσσες»

Δίνονται $P(\Gamma)=\frac{3\nu}{\nu^2+1}$, $P(I)=\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$, $P(\Gamma\cap I)=\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$,

$$P(\Gamma\cup I)=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(\sqrt{x^2+3}^{\,2}-2^2\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\lim_{x\to -1}\frac{2\left(x^2-1\right)}{x(x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2(x-1)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}=\frac{2\cdot(-2)}{-1\cdot\left(\sqrt{4}+2\right)}=\frac{-4}{-4}=1$$

Αφού $P(\Gamma\cup I)=1$ ισχύει $\Gamma\cup I=\Omega$, άρα το ενδεχόμενο $\Gamma\cup I$ είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

**Γ.2** Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων ισχύει

$$P(\Gamma\cup I)=P(\Gamma)+P(I)-P(\Gamma\cap I)\Leftrightarrow$$

$$1=\frac{3\nu}{\nu^2+1}+\frac{\nu+2}{\nu^2+1}-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow$$

$$1=\frac{3\nu+\cancel{\nu}+2-\cancel{\nu}-1}{\nu^2+1}\Leftrightarrow$$

$$\nu^2+\cancel{1}=3\nu+\cancel{1}\Leftrightarrow$$

$$\nu^2-3\nu=0\Leftrightarrow \nu(\nu-3)=0\Leftrightarrow \underset{\text{Απορρ.}}{\nu=0}\quad \text{ή}\quad \underset{\text{Δεκτό}\left(\substack{\text{αφού}\\ \nu\geq 3}\right)}{\nu=3}$$

**Γ.3** Ενδεχόμενο $(\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)$: «ο μαθητής μαθαίνει μόνο μία από τις δύο παραπάνω γλώσσες»
Τα ενδεχόμενα Γ-Ι, Ι-Γ είναι ασυμβίβαστα άρα

$$P\left((\Gamma-I)\cup(I-\Gamma)\right)=P(\Gamma-I)+P(I-\Gamma)=$$

$$=\underbrace{P(\Gamma)-P(\Gamma\cap I)+P(I)}_{}-P(\Gamma\cap I)=$$

$$=\quad P(\Gamma\cup I)\quad -P(\Gamma\cap I)=1-\frac{\nu+1}{\nu^2+1}\overset{(\nu=3)}{=}$$

$$=1-\frac{4}{10}=\frac{6}{10}=0,6$$

**Γ.4** Δίνεται ότι $N(\Gamma \cap I)=32$ και αναζητώ τον αριθμό των μαθητών της τάξης δηλαδή $N(\Omega)$=;

Ισχύει $P(\Gamma \cap I)=\frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)}=\frac{4}{10} \Leftrightarrow N(\Omega)=80$

## <u>ΘΕΜΑ Δ</u>

**Δ.1** $f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}, x \in (0,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{(1+\ln^2 x)' \cdot x-(x)' \cdot \left(1+\ln^2 x\right)}{x^2}=\frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}-1-\ln^2 x}{x^2}=$$

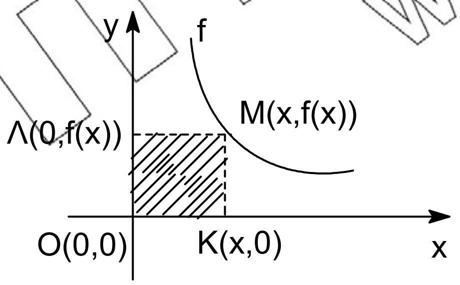
$$=-\frac{\ln^2 x-2\ln x+1}{x^2}=-\frac{(\ln x-1)^2}{x^2} \leq 0, \ \forall x \in (0,+\infty)$$

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \Leftrightarrow x=e$
- $\forall x \in (0,+\infty)$ ισχύει $(\ln x-1)^2 \geq 0$ και $x^2>0$.
  Άρα $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (0,+\infty)$

| x | 0 | | e | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | — | o | — | |
| f | | ↘ | | ↘ | |

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

**Δ.2**




$f(x)=\frac{1+\ln^2 x}{x}>0, \forall x \in (0+\infty)$
Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΟΚΜΛ έχει εμβαδόν:

$$(OKM\Lambda)=E(x)=(OK)\cdot(O\Lambda)=|x|\cdot|f(x)| \underset{\substack{x>0 \\ f(x)>0}}{=} x \cdot f(x)$$

άρα $E(x)=x \cdot f(x)=\cancel{x} \cdot \frac{1+\ln^2 x}{\cancel{x}}=1+\ln^2 x, \ x \in (0,+\infty)$

$$E'(x)=2 \cdot \ln x \cdot (\ln x)'=\frac{2 \cdot \ln x}{x}, \ x \in (0,+\infty)$$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \Leftrightarrow x=1$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>\ln 1 \Leftrightarrow x>1$

| x | | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E' | | ‖ | — | o | + | |
| E | | ‖ | ↘ | | ↗ | |
| | | | | ΟΛ. ΕΛΑΧ. | | |

E(x) γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,1] και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$. Άρα η E(x) παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στη θέση x=1 και τότε είναι (ΟΚ)=x=1, (ΟΛ)=f(1)=1, άρα τότε το ΟΚΛΜ είναι τετράγωνο πλευράς x=1.

**Δ.3** Η εφαπτομένη της $C_f$ στο σημείο της Σ(1,f(1)) έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$f'(x) = -\frac{(\ln 1-1)^2}{1^2} = -1.$$

Η ευθεία (ε): y=λx+β (με $\beta \neq 10$) είναι παράλληλη στην παραπάνω εφαπτομένη άρα λ=f′(1)=-1 άρα (ε): $y=-x+\beta$

Τα σημεία $(x_i,y_i)$, i=1,2,…,10 ανήκουν στην ευθεία (ε) άρα ισχύει $y_i=-x_i+\beta$ όπου οι τετμημένες $x_i$ έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $S_x=2$. Άρα οι τεταγμένες $y_i$ έχουν:

- μέση τιμή $\bar{y}=-\bar{x}+\beta=-10+\beta$
- τυπική απόκλιση $S_y = |-1|\cdot S_x = S_x = 2$
- συντελεστή μεταβολής $CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{|\beta-10|}$

Το δείγμα των $y_i$ είναι ομοιογενές αν και μόνο αν ισχύει:

$$CV_y \le 10\% \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta-10|} \le \frac{1}{10} \underset{\cdot 10|\beta-10|>0}{\Leftrightarrow}$$

$$20 \le |\beta-10| \Leftrightarrow |\beta-10| \ge 20 \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \beta-10 \le -20 \Leftrightarrow \beta \le -10 \\ \text{ή} \\ \beta-10 \ge 20 \Leftrightarrow \beta \ge 30 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \beta \in (-\infty,-10] \cup [30,+\infty)$$

**Δ.4**
- $\varnothing \underset{\neq}{\subseteq} A \subseteq A \cup B \Rightarrow$

  $0 < P(A) \le P(A\cup B) \overset{f\downarrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}$

  $f(P(A)) \ge f(P(A\cup B))$ (**1**)
- $\varnothing \underset{\neq}{\subseteq} A \cap B \subseteq A \cup B \Rightarrow$

  $0 < P(A\cap B) \subseteq P(A\cup B) \overset{f\downarrow(0,+\infty)}{\Rightarrow}$

  $f(P(A\cap B)) \ge f(P(A\cup B))$ (**2**)

Από (1) + (2) έχουμε: $f(P(A)) + f(P(A\cap B)) \ge 2\cdot f(P(A\cup B))$


<u>Επιμέλεια</u>
Μαρκάτος Διονύσης
Μαστοράκος Παναγιώτης
Αλεξοπούλου Βιβή
Άννινος Δημήτρης