ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΙΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 σχ. βιβλίο (ΟΕΔΒ) σελίδα 260

Α.2 σχ. βιβλίο (ΟΕΔΒ) σελίδα 280

Α.3 **α** → Σ
β → Σ
γ → Λ
δ → Λ
ε → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2 \Leftrightarrow$

$|z-3i|+|\overline{\bar{z}+3i}|=2 \Leftrightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow$

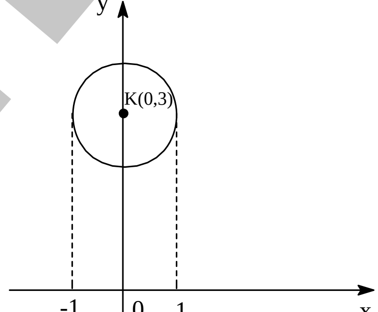
$2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων z είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα ρ=1

Β.2 $|z-3i|=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow$

$(z-3i)(\bar{z}+3i)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$, $z \neq 3i$

Β.3 $\omega=|z-3i|+\dfrac{1}{z-3i}\overset{(B_2)}{=}z-\cancel{3i}+\bar{z}+\cancel{3i}=2\mathrm{Re}(z) \in R$

Έστω $z=x+yi$ άρα ω=2x, $x \in R$



$-1 \le x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 2 \Leftrightarrow$
$-2 \le \omega \le 2$

Β.4 $|z-\omega| = |x+yi-2x| =$

$|-x+yi| = \sqrt{(-x)^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

Γ.1 Για κάθε $x \in R$ ισχύει $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right) = f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$

$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x = f'(x)+xf''(x) \Leftrightarrow$

$e^x f''(x)-xf''(x)+e^x f'(x)-f'(x) = e^x \Leftrightarrow$

$f''(x)(e^x-x)+f'(x)(e^x-1) = e^x \Leftrightarrow$

$\left[f'(x)\left(e^x-x\right)\right]' = \left(e^x\right)'$ τότε

$f'(x)(e^x-x) = e^x+c_1$

Για x=0 είναι $f'(0)\cdot 1 = 1+c_1 \overset{f'(0)=0}{\Leftrightarrow} c_1 = -1$

Άρα $f'(x)\left(e^x-x\right) = e^x-1$ (1)

Θέτω $g(x) = e^x-x,\quad x \in R$

$g'(x) = e^x-1,\quad x \in R$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	↘	Ο.Ε g(0)=1	↗

Η g παρουσιάζει στη θέση x=0 ολικό ελάχιστο άρα για κάθε $x \in R$ ισχύει

$g(x) \ge g(0) \Leftrightarrow g(x) \ge 1 \Rightarrow e^x-x > 0$

Από (1) $\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x-x} \Leftrightarrow f'(x) = \left(\ln\left(e^x-x\right)\right)'$ τότε

$f(x) = \ln(e^x-x)+c_2$. Για x=0 είναι $f(0) = c_2 \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c_2 = 0$

Άρα $f(x) = \ln(e^x-x)$

Γ.2 $f'(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x-x},\ x \in R$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	-	0	+
f	↘	Ο.Ε f(0)=0	↗

f ↘ στο $(-\infty,0]$

f ↗ στο $[0,+\infty)$

Η f παρουσιάζει ολ. ελάχιστο στο x=0 με minf(x)=f(0)=0

Γ3. f′ παραγωγίσιμη στο R ως πράξεις μεταξύ των παραγωγίσιμων x, e^x, 1 και

$$f''=\frac{2e^x-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x\left(2-x\right)-1}{\left(e^x-x\right)^2},\ \ x\in R$$

Θέτω $K(x)=e^x(2-x)-1,\ \ x\in R$

$K'(x)=e^x(1-x)$

$K'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
K’(x)	+	0	-
K(x)	$\nearrow$		$\searrow$

$\boxed{\text{O.M}}$
K(1)=e-1

Στο $A_1=\left(-\infty,1\right]$ K(x) συνεχής και $\nearrow$ οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι

$K(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}K(x),K(1)\right]=\left(-1,e-1\right]$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}K(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x(2-x)-1\right]=-1+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(2-x)}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}$

$$=-1+\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=-1+\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=-1+\lim_{x\to-\infty}e^x=-1+0=-1$$

Στο $A_2=\left[1,+\infty\right)$ K(x) συνεχής και $\searrow$ οπότε το αντίστοιχο σύνολο τιμών είναι

$K(A_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}K(x),K(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right]$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}K(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x(2-x)-1\right]=(+\infty)(-\infty)-1=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-x\right)=-\infty$

$0\in K(A_1)$ και $0\in K(A_2)$ οπότε υπάρχουν

$x_1\in\left(-\infty,1\right)$ και $x_2\in\left(1,+\infty\right)$ τέτοια ώστε

$K(x_1)=K(x_2)=0$ δηλαδή $f''(x_1)=f''(x_2)=0$

Τα x_1, x_2 είναι μοναδικές ρίζες της K(x)=0 στα A_1, A_2 αντίστοιχα αφού K(x) γνήσια μονότονη σε καθένα απ’ αυτά.

Για κάθε x με $x < x_1 \overset{K(x)\nearrow A_1}{\Rightarrow} K(x) < K(x_1) \Rightarrow K(x) < 0$

Για κάθε x με $x_1 < x < 1 \overset{K(x)\nearrow A_1}{\Rightarrow} K(x_1) < K(x) \Rightarrow K(x) > 0$

Για κάθε x με $1 < x < x_2 \overset{K(x)\searrow A_2}{\Rightarrow} K(x) > K(x_2) \Rightarrow K(x) > 0$

Για κάθε x με $x > x_2 \overset{K(x)\searrow A_2}{\Rightarrow} K(x) < K(x_2) \Rightarrow K(x) < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f''(x) = \dfrac{K(x)}{\left(e^x - x\right)^2}$		-	0	+	0	-	
f		$\cap$		$\cup$		$\cap$	
			Σ.Κ		Σ.Κ		

Άρα η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής τα $\left(x_1, f(x_1)\right), \left(x_2, f(x_2)\right)$,

επειδή μόνο σ' αυτά αλλάζει η κυρτότητα της f και υπάρχουν οι αντίστοιχες εφαπτόμενες σ' αυτά αφού f παραγωγίσιμη στο R.

Γ.4 Έστω $h(x) = \ln\left(e^x - x\right) - \text{συν}x = f(x) - \text{συν}x,\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

h συνεχής στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f(x), συνx.

$h(0) = f(0) - \text{συν}0 = -1 < 0$

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \text{συν}\dfrac{\pi}{2} = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > f(0) = 0$ αφού f $\nearrow$ στο $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Από Θ. Bolzano υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ για την εξίσωση h(x)=0.

Η ρίζα είναι μοναδική αφού $h'(x) = f'(x) + \text{ημ}x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ άρα h $\nearrow$ στο $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Δ.1 $\dfrac{1 - f(x)}{e^{2x}} = \displaystyle\int_0^{-x} \dfrac{e^{2t}}{g(x+t)} dt \quad (1)$

Θέτω $\omega = x + t \Leftrightarrow t = \omega - x$

$dt = d\omega$

Για $t = 0 \Rightarrow \omega = x$

$t = -x \Rightarrow \omega = 0$

Από (1) έχουμε $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2(\omega-x)}}{g(\omega)}d\omega=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega$

Άρα $\frac{1-f(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega \Leftrightarrow$

$$f(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega,\ x\in R$$

Επίσης $\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$ (2)

Θέτω $u=x+t \Leftrightarrow t=u-x$

$du=dt$

Για $t=0 \Rightarrow u=x$

$t=-x \Rightarrow u=0$

Από (2) $\Leftrightarrow \frac{1-g(x)}{e^{2x}}=\int_x^0\frac{e^{2(u-x)}}{f(u)}du \Leftrightarrow$

$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}}=-\frac{1}{e^{2x}}\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du \Leftrightarrow$$

$$g(x)=1+\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du,\ x\in R$$

$\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}$ συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών

Άρα $\int_0^x\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega$ παραγωγίσιμη στο R άρα

$$f'(x)=\left(1+\int_0^x\frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega\right)'=\frac{e^{2x}}{g(x)}$$

Επίσης $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ συνεχής στο R ως πηλίκο συνεχών άρα $\int_0^x\frac{e^{2u}}{f(u)}du$ παραγωγίσιμη στο R άρα $g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$.

$f'(x)\cdot g(x)=e^{2x}$ και $f(x)\cdot g'(x)=e^{2x}$

Οπότε $f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)=0 \Leftrightarrow$

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=0 \quad (g(x)>0)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0 \quad \text{άρα} \quad \frac{f(x)}{g(x)}=c\,,\quad x\in R$$

Για x=0 είναι $\frac{f(0)}{g(0)}=c \Leftrightarrow c=1$ αφού

$$f(0)=1+\int_0^0 \frac{e^{2\omega}}{g(\omega)}d\omega=1+0=1 \quad \text{και} \quad g(0)=1+\int_0^1 \frac{e^{2u}}{f(u)}du=1+0=1$$

Άρα $f(x)=g(x)$, $x\in R$

Δ.2 $f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \overset{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} f'(x)\cdot f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow$

$$\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)'=\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' \text{ οπότε } \frac{f^2(x)}{2}=\frac{e^{2x}}{2}+c_1,\quad x\in R$$

Για x=0 είναι $\frac{f(0)}{2}=\frac{1}{2}+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

Οπότε $f^2(x)=e^{2x}$ και f(x)>0 οπότε $f(x)=e^x$, $x\in R$

Δ.3 $L=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln\left(f(x)\right)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}$

Θέτω $u=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\frac{1}{u}$

όταν $x\to 0^- \Rightarrow u=-\infty$

Οπότε $L=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{\frac{1}{u}}{e^u}=\lim\limits_{u\to -\infty}\frac{e^{-u}}{u}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}$

- $\lim\limits_{u\to -\infty} e^{-u}=+\infty$ $\qquad \lim\limits_{u\to -\infty}\frac{\left(e^{-u}\right)'}{(u)'}=$
- $\lim\limits_{u\to -\infty} u=-\infty$ $\qquad \lim\limits_{u\to -\infty}\frac{-e^{-u}}{1}=-\infty$

Δ.4 $f(t^2)=e^{t^2}$ συνεχής στο R ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων e^t, t^2

Επομένως $F(x)=\int_1^x f(t^2)dt$ παραγωγίσιμη στο R, άρα και συνεχής.

Ισχύει: $$F'(x)=\left(\int_1^x f(t^2)dt\right)'=f(x^2)=e^{x^2}$$

- F(1)=0
- Για κάθε $x\in[0,1)$ ορίζω διάστημα $[x,1]$.

Για κάθε $t\in[x,1]$ είναι $f\left(t^2\right)>0$ και αφού

$f(t^2)=e^{t^2}$ συνεχής ισχύει $\int_x^1 f(t^2)dt>0 \Leftrightarrow$

$-\int_1^x f\left(t^2\right)dt>0 \Leftrightarrow \int_1^x f\left(t^2\right)dt<0 \Leftrightarrow F(x)<0 \quad \forall x\in[0,1)$ και αφού F(1)=0 είναι

$F(x)\le 0 \quad \forall x\in[0,1]$ οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1|F(x)|dx=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 (x)'F(x)dx=$$

$$=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=0+\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{e-1}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ