ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

<u>ΘΕΜΑ 1ο</u>

Α. Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 251

Β. Ο.Ε.Δ.Β. σελίδα 213.

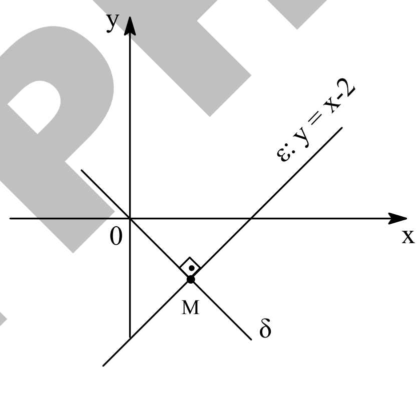
Γ. **α.** Σ, **β.** Σ, **γ.** Λ, **δ.** Λ, **ε.** Λ

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Α. α. $\left.\begin{matrix} x = 2\lambda + 1 \\ y = 2\lambda - 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow y = x - 2$

Οι εικόνες των μιγαδικών z βρίσκονται στην ευθεία $y = x - 2$

Α. β.



Θεωρώ ευθεία (δ) που διέρχεται από το Ο(0,0) και

$\delta \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda_\delta = -1$

$\delta : y = -x$

$(\Sigma)\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow x = 1, y = -1$ Άρα ο μιγαδικός της (ε) με το ελάχιστο

μέτρο είναι: z_o=1-i

Β. $|\omega|^2+\overline{\omega}-12=1-i \overset{\omega=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$x^2+y^2+x-yi-12-1+i=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+x-13+(1-y)i=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2+x-13=0 \\ \text{και} \qquad 1-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \{x=-4 \ \text{ ή } \ x=3 \quad \text{και} \quad y=1$$

Οπότε: $\omega_1=-4+i, \quad \omega_2=3+i$

<u>ΘΕΜΑ 3ο</u>

Α. $f(x)\geq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0)$ για κάθε $x>-1$
Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=0 και είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x)=\alpha^x \ell n\alpha-\dfrac{1}{x+1}$.
Από Θεώρημα Fermat $f'(0)=0 \Leftrightarrow \ell n\alpha-1=0 \Leftrightarrow \alpha=e$

Β. α. Για $\alpha=e \quad f(x)=e^x-\ell n(x+1), \quad x>-1$

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1} \quad , \quad x>-1$$

f′ παραγωγίσιμη στο (-1, $+\infty$) με $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Έχουμε $f''(x)>0 \ , \ \forall x>-1$ άρα f κυρτή.

Β. β. Από (α) $f'\nearrow$ στο $(-1,+\infty)$ με $f'(0)=0$

Για $-1<x<0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \Rightarrow f'(x)<0$ Άρα $f \searrow \ (-1,0]$

Για $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0) \Rightarrow f'(x)>0$ Άρα $f \nearrow \ [0,+\infty)$

Β. γ. Έστω $g(x)=(x-2)\big(f(\beta)-1\big)+(x-1)\big(f(\gamma)-1\big)$
g Συνεχής στο [1,2] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
$g(1)=-\big(f(\beta)-1\big)=1-f(\beta)$
$g(2)=f(\gamma)-1$

Για $x>0 \overset{f\nearrow\ [0,+\infty)}{\Rightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1$

Για $-1<x<0 \overset{f\searrow\ (-1,0]}{\Rightarrow} f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>1$

Αφού $\beta,\gamma \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$ ισχύει ότι:
f(β)>1 και f(γ)>1
Άρα g(1)<0 και g(2)>0, $g(1)\cdot g(2)<0$
Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα (1,2) για την εξίσωση g(x)=0 $\Leftrightarrow \dfrac{f(\beta)-1}{x-1}+\dfrac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

t , f(t) συνεχείς στο [0,2] οπότε
H(x) παραγωγίσιμη στο [0,2] οπότε και συνεχής.
$H'(x) = xf(x)$, $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο [0,2] οπότε και συνεχής
$\left(\int_o^x f(t)dt\right)' = f(x)$

α. • Για $x \in (0,2]$ G(x) συνεχής ως πράξεις συνεχών.

• Για x=0 $G(0) = 6\lim_{t\to0}\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} = 6\lim_{t\to0}\frac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\left(\sqrt{1-t^2}+1\right)} = \frac{6}{2} = 3$

$\lim_{x\to0} H(x) = H(0) = \int_0^0 tf(t)dt = 0$

$\lim_{x\to0} x = 0$

$\lim_{x\to0}\frac{H(x)}{x} \overset{D.L.H}{=} \lim_{x\to0}\frac{H'(x)}{(x)'} = \lim_{x\to0}(x\cdot f(x) = 0\ f(0) = 0$

$\varphi(x) = \int_0^x f(t)dt$

$\lim_{x\to0}\varphi(x) = \varphi(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$

$\lim_{x\to0} G(x) = \lim_{x\to0}\left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right) = 3$

Αφού $\lim_{x\to0} G(x) = G(0) = 3$ η G συνεχής και στο x_o=0

Άρα G συνεχής στο [0,2]

β. $\frac{H(x)}{x}$ παραγωγίσιμη στο (0,2)

$\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη στο (0,2)

Οπότε G(x) παραγωγίσιμη στο (0,2) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3\right)' = \frac{H'(x)\cdot x - H(x)}{x^2} - f(x)$$

$$= \frac{x^2\cdot f(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = -\frac{H(x)}{x^2} \qquad 0 < x < 2$$

γ. G συνεχής στο [0,2]
G παραγωγίσιμη στο (0,2)
G(0)=3

$$G(2)=\frac{H(2)}{2}-\int_0^2 f(t)dt+3=$$

$$=\frac{\int_0^2 tf(t)dt-2\int_0^2 f(t)dt}{2}+3$$

$$=\frac{\int_0^2 (t-2)f(t)dt}{2}+3=0+3=3$$

Άρα G(0)=G(2).

Από Θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\alpha\in(0,2):\quad G'(\alpha)=0\Leftrightarrow -\frac{H(\alpha)}{\alpha^2}=0\Leftrightarrow H(\alpha)=0$$

δ. Εφαρμόζοντας Θεώρημα Μέσης Τιμής για την G στο [0,α].
G συνεχής στο [0,α] $\subseteq$ [0,2]
G παραγωγίσιμη (0,α) $\subseteq$ (0,2)
Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha)$:

$$G'(\xi)=\frac{G(\alpha)-G(0)}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{H(\xi)}{\xi^2}=\frac{\cancelto{0}{\frac{H(\alpha)}{\alpha}}-\int_0^\alpha f(t)dt+\cancel{3}-\cancel{3}}{\alpha}\Leftrightarrow$$

$$-\alpha H(\xi)=-\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\alpha H(\xi)=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt\Leftrightarrow$$

$$\alpha\int_0^\xi t\cdot f(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$

β' τρόπος

Εφαρμόζοντας Θεώρημα Rolle στο [0,α] για την $F(x)=x\int_0^\alpha f(t)dt+\alpha G(x)$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ