ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ κ' ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ.

24/5/2008.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ.

ΘΕΜΑ 1°

A.1 σελ. 235.

A.2 σελ. 191 (ορισμός).

B. α → Σ.

β → Σ

γ → Λ

δ → Λ

ε → Σ.

ΘΕΜΑ 2°

α. $|(i+2\sqrt{2}).z|=6 \Leftrightarrow |z|.|2\sqrt{2}+i|=6 \Leftrightarrow$

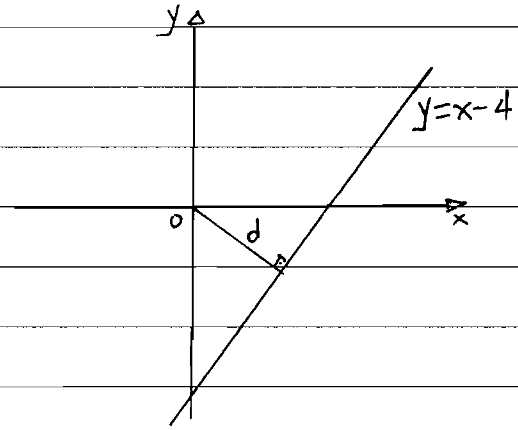
$|z|.\sqrt{9}=6 \Leftrightarrow |z|=2.$

Κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ κ' ακτίνα $\rho=2$.

β. $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)| \overset{w=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2} \Leftrightarrow y=x-4.$

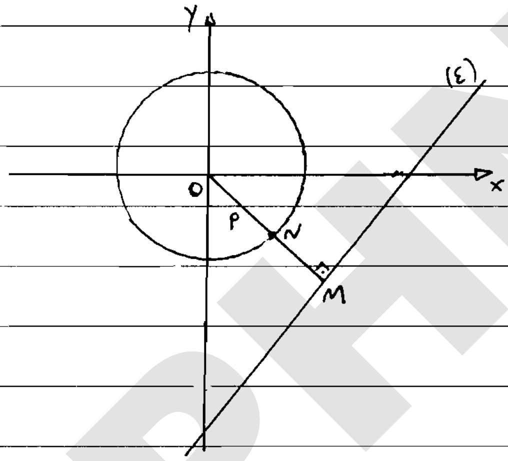
γ.



$\varepsilon: \ x-y-4=0.$

Η ελάχιστη τιμή του $|w| = d(O,\varepsilon) = \dfrac{|-4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

δ.



Η ελάχιστη τιμή του $|z-w| = (OM)-(ON) = (OM)-\rho =$
$= 2\sqrt{2} - 2.$

ΘΕΜΑ 3°

α. $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

- $\lim_{x\to 0^+} x = 0$
- $\lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$
- $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty.$

και $f(0)=0$

άρα f συνεχής στο $x=0$.

β. Για $x>0$ f παραγωγίσιμη με $f'(x)=\ln x+1$, f συνεχής στο $[0,+\infty)$.

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{e}.$

x	0	$1/e$	$+\infty$
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

f γν. φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ και γν. αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

$A_1=\left[0,\frac{1}{e}\right]$, f γν. φθίνουσα, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

$f(A_1)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right]=\left[-\frac{1}{e},0\right]$

$A_2=\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, f γν. αύξουσα, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\ln x=+\infty.$

$f(A_2)=\left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{e},+\infty\right).$

$f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [-\frac{1}{e}, +\infty)$.

γ. $x = e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \frac{a}{x} \Leftrightarrow$

$x \cdot \ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a \quad , \quad x > 0. \quad (1)$

- Αν $a < -\frac{1}{e}$, $a \notin f(A)$ οπότε η (1) δεν έχει πραγματική λύση.
- Αν $a = -\frac{1}{e}$ τότε η (1) έχει μοναδική λύση $x = \frac{1}{e}$.

Άρα $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$. Για $x > \frac{1}{e}$ έχουμε:

$f(x) > f(\frac{1}{e})$ άρα $f \nearrow [\frac{1}{e}, +\infty)$.

για $0 < x < \frac{1}{e}$ $f(x) > f(\frac{1}{e})$ άρα $f \searrow [0, \frac{1}{e}]$.

- Αν $-\frac{1}{e} < a < 0$ η (1) έχει μοναδική λύση στο $(0, \frac{1}{e})$ άρα $a \in f(A_1)$ με $a \neq f(0)$, $a \neq f(\frac{1}{e})$. και $f \searrow$ στο A_1.

Επίσης η (1) έχει μοναδική λύση στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$ άρα $a \in f(A_2)$ με $a \neq f(\frac{1}{e})$. και $f \nearrow$ στο A_2.

- Αν $a = 0$ η (1) έχει στο A_1 μοναδική λύση την $x = 0$ που απορρίπτεται άρα $x > 0$. και στο A_2 έχει μοναδική λύση την $x = 1$.
- Αν $a > 0$ τότε $a \notin f(A_1)$, $a \in f(A_2)$. με $a \neq f(\frac{1}{e})$ άρα η (1) έχει μοναδική λύση στο $(\frac{1}{e}, +\infty)$ άρα $f \nearrow$ στο A_2.

δ. Για κάθε $x>0$ ορίζεται το $[x, x+1]$ όπου η f είναι παραγωγίσιμη άρα από Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχ. $\xi \in (x, x+1)$:
$f'(\xi) = f(x+1) - f(x)$

Για κάθε $x>0$ f' παραγωγίσιμη με
$f''(x) = (\ln x + 1)' = \dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x>0$.

Άρα f' γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
Οπότε για $x < \xi < x+1$ έχουμε
$f'(\xi) < f'(x+1) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4°

α. f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και

$$f(x) = (10x^3+3x)\cdot\int_0^2 f(t)dt - 45, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Θέτω $c = \int_0^2 f(t)dt$. άρα $f(x) = (10x^3+3x)\cdot c - 45$.

Έχουμε $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (10x^3+3x)\cdot c\, dx - \int_0^2 45 dx \Leftrightarrow$

$$c = c\left[10\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 - 90 \Leftrightarrow$$

$$c = c\cdot 46 - 90 \Leftrightarrow 45\cdot c = 90 \Leftrightarrow c = 2.$$

Άρα $f(x) = (10x^3+3x)\cdot 2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim\limits_{u\to x}\dfrac{g'(x)-g'(u)}{x-u} =$

Θέτω: $u = x-h$

$h\to 0$ τότε $u\to x$

$h = x-u$.

$= \lim\limits_{u\to x}\dfrac{g'(u)-g'(x)}{u-x} = g''(x).$

γ. i) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\right)'}{(h^2)'} =$

- $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, g συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{h\to 0} g(x-h) = g(x)$.
- $\lim\limits_{h\to 0} h^2 = 0$.

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x)+g'(x)-g'(x-h)}{2h}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x+h)-g'(x)}{h} + \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\left(g''(x)+g''(x)\right) = g''(x).$

Άρα $g''(x) = f(x)+45 \Leftrightarrow g''(x) = 20x^3+6x \Leftrightarrow$
$g'(x) = 5x^4+3x^2+c_1$

$x=0$ $\left.\begin{array}{l} g'(0)=1 \\ g'(0)=c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1.$

Άρα $g'(x) = 5x^4+3x^2+1$. άρα $g(x) = x^5+x^3+x+c_2$

$x=0$ $\left.\begin{array}{l} g(0)=1 \\ g(0)=c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = 1.$

Άρα $g(x) = x^5+x^3+x+1$.

ii) $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η g γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Οπότε g 1-1