ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Απόδειξη θεωρήματος σελίδα 135 στο σχολικό

Α.2 **α)** ΨΕΥΔΗΣ

β) Η συνάρτηση f(x)=|x| είναι συνεχής στο x_o=0 αφού ισχύει

$$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0}|x| = 0 = f(0)$$

Και δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0 αφού:

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to0^+}\frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Α.3 Ορισμός (ΙΙ) στο σχολικό βιβλίο σελίδα 73

Α.4 **α)** Λάθος **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Σωστό **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f(x) = \ell n x \quad , \text{ πεδίο ορισμού } A_f = (0,+\infty)$$

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, \text{ πεδίο ορισμού } A_g = R-\{1\}$$

Β.1 **f∘g**

- πεδίο ορισμού $\to A_{f\circ g} = \{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} =$

$$= \left\{x \in R-\{1\} \text{ κ' } \frac{x}{1-x} > 0\right\} = (0,1)$$

$$\downarrow$$

$$x \neq 1 \quad \text{κ'} \quad x(1-x) > 0 \Leftrightarrow$$

$$x - x^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$0 < x < 1$$

- Τύπος $\to (f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \ell n\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$

B.2 Η συνάρτηση $h(x)=(f \circ g)(x)$ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο A=(0,1) με

$$h'(x)=\frac{1}{\frac{x}{1-x}}\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{\cancel{1-x}}{x}\cdot\frac{1-x-x(1-x)'}{(1-x)^{\cancel{2}}}=$$

$$=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1}{x(1-x)}>0\ ,\ \forall x\in(0,1)$$

Άρα $h\nearrow$ στο A=(0,1) ,

Άρα η h είναι 1-1 , άρα ορίζεται η συνάρτηση

$$h^{-1}:h(A)\to A \text{ όπου } h(A)=\left(\lim_{x\to0^+}h(x)\ ,\ \lim_{x\to1^-}h(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R$$

- $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ell n\frac{x}{1-x}=$
  $=\lim\limits_{u\to0^+}\ell n u=-\infty$

  $u=\frac{x}{1-x}$
  $x\to0^+$
  άρα $u\to0^+$

- $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\ell n\frac{x}{1-x}=$
  $=\lim\limits_{u\to+\infty}\ell n u=+\infty$

  $u=\frac{x}{1-x}$
  $x\to1^-$
  άρα $u\to+\infty$

Έστω $y=f(x)\Leftrightarrow$

$$y=\ell n\frac{x}{1-x}\quad,\quad y\in f(A)=R\Leftrightarrow$$

$$e^y=\frac{x}{1-x}\Leftrightarrow e^y-x\cdot e^y=x\Leftrightarrow$$

$$e^y=x\cdot(e^y+1)\Leftrightarrow x=\frac{e^y}{e^y+1}\quad,\quad y\in R$$

Άρα $h^{-1}(y)=\frac{e^y}{e^y+1}$, $y\in R$

B.3 Συνάρτηση $\varphi(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$, $x\in R$

Η φ είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής, στο R με

$$\varphi'(x)=\frac{e^x\left(e^x+1\right)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0\quad,\quad x\in R$$

Άρα $\varphi\nearrow$ στο R, άρα η φ **δεν** έχει ακρότατα

- $\varphi''(x)=\dfrac{e^x\left(e^x+1\right)^2-e^x\cdot 2\left(e^x+1\right)e^x}{\left(e^x+1\right)^4}=\dfrac{e^x\cancel{\left(e^x+1\right)}\cdot\left(e^x+1-2e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^{\cancel{4}\,3}}=$

$$=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^3}\quad,\quad x\in R\quad \text{όπου}\quad e^x>0\ \ \kappa'\ \left(e^x+1\right)^3>0\ ,\forall x\in R$$

- $\varphi''(x)=0\Leftrightarrow 1-e^x=0\Leftrightarrow e^x=e^0\Leftrightarrow x=0$
- $\varphi''(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow e^x<e^0\Leftrightarrow x<0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ''	$+$	0	$-$
φ	$\frown$	Σ.Κ	$\smile$

$\boxed{\varphi(0)=\frac{1}{2}}$

Η φ είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Το μοναδικό σημείο καμπής της C_φ είναι το $A(0,\varphi(0))=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ αφού μόνο σ' αυτό αλλάζει η κυρτότητα της φ και υπάρχει η αντίστοιχη εφαπτομένη της C_φ , επειδή φ είναι παραγωγίσιμη στο R.

B.4 · $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\underset{D.L.H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

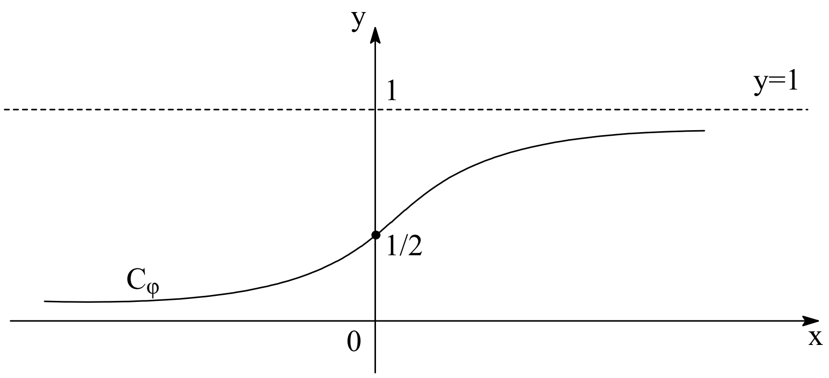
Άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $+\infty$

· $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$

Άρα η ευθεία y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_φ στο $-\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	$+$		$+$
φ''	$+$	0	$-$
φ	0 ↗	Σ.Κ	↗ 1

$\boxed{\varphi(0)=\frac{1}{2}}$



ΘΕΜΑ Γ

$$\text{Συνάρτηση } f(x) = -\eta\mu x \ , \quad x \in [0,\pi]$$

Γ.1 $f'(x) = -\sigma\upsilon\nu x \ , \ x \in [0,\pi]$

Το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$ **δεν** ανήκει στη C_f αφού $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{\pi}{2} = -1 \neq -\frac{\pi}{2}$

Η εφαπτομένη της C_f σε σημείο της $(x_o, f(x_o))$ έχει εξίσωση

$$y - f(x_o) = f'(x_o)\cdot(x - x_o) \Leftrightarrow$$
$$y + \eta\mu x_o = -\sigma\upsilon\nu x_o \cdot (x - x_o) \qquad (1)$$

Η εφαπτομένη αυτή για να διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, πρέπει από την (1) να ισχύει:

$$-\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_o = -\sigma\upsilon\nu x_o \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x_o\right) \Leftrightarrow$$
$$\sigma\upsilon\nu x_o \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x_o\right) - \frac{\pi}{2} + \eta\mu x_o = 0 \ , \ \ x_o \in [0,\pi]$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{\pi}{2} + \eta\mu x \ , \ \ x \in [0,\pi]$ κι αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα [0,π].

Η g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο [0,π]

με $g'(x) = -\eta\mu x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cancel{\sigma\upsilon\nu x} + \cancel{\sigma\upsilon\nu x} = \eta\mu x \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = 0$ ή $x - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \ , \ x = \pi$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$ημx$		$+$		$+$	
$x-\pi/2$		$-$	0	$+$	
g'	0	$-$	0	$+$	0
g		$\searrow$		$\nearrow$	
	T.M		T.E		T.M
	$g(0)=0$		$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}$		$g(\pi)=0$

- $ημx > 0, \forall x \in (0,\pi)$
- $x-\frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\pi}{2}$

- g(0)=0

  Για κάθε $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ δηλαδή $0 < x \le \frac{\pi}{2} \overset{g\searrow\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}{\Rightarrow}$

  $g(0) > g(x) \Rightarrow g(x) < 0$

- g(π)=0

  Για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ δηλαδή $\frac{\pi}{2} \le x < \pi \overset{g\nearrow\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}{\Rightarrow}$

  $g(x) < g(\pi) \Rightarrow g(x) < 0$

Άρα η εξίσωση g(x)=0 έχει μοναδικές ρίζες το x=0 και το x=π, άρα υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ της C_f που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$. Τα αντίστοιχα σημεία επαφής είναι τα O(0,f(0)), B(π,f(π)).

- Η εξίσωση της ($ε_1$) προκύπτει από την (1) για x_o=0 και είναι

  $y + ημ0 = -συν0 \cdot (x-0) \Leftrightarrow$

  $(ε_1): y = -x$

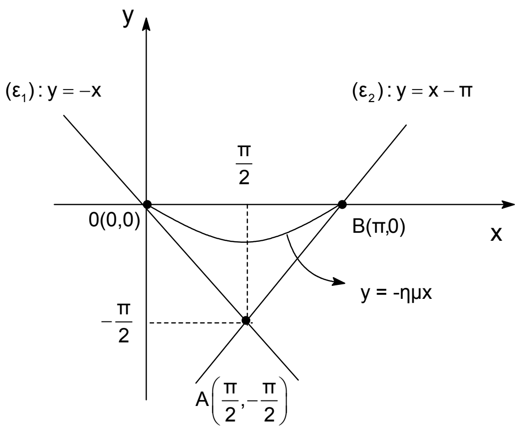
- Η εξίσωση της ($ε_2$) προκύπτει από την (1) για x=π και είναι

  $y + ημπ = -συνπ \cdot (x-\pi) \Leftrightarrow$

  $(ε_2): y = x - \pi$

Γ.2 $f''(x) = -(συνx)' = ημx \quad , \quad x \in [0,\pi]$

Η f είναι συνεχής στο [0,π] (ως παραγωγίσιμη) με $f''(x) > 0 \ , \ \forall x \in (0,\pi)$ άρα η f είναι κυρτή στο [0,π] άρα οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ της C_f βρίσκονται κάτω από τη C_f, εκτός από τα αντίστοιχα σημεία επαφής.



Οι συναρτήσεις h(x)= –x και ω(x)=x-π είναι συνεχείς στο R ως πολυωνυμικές.

Ισχύει ότι:

- $E_2 = \int_0^{\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\pi} |-ημx| dx = \int_0^{\pi} |ημx| dx = \int_0^{\pi} ημx dx =$

$$\downarrow$$

$$ημx \geq 0 \ , \ \forall x \in [0,\pi]$$

$$= -[συνx]_0^{\pi} = -(συνπ - συν0) = -(-1-1) = 2 \text{ τ.μ.}$$

- $E_1 = \begin{pmatrix} εμβαδόν \\ O\overset{\Delta}{A}B \end{pmatrix} - E_2 = \frac{β \cdot υ}{2} - 2 = \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - 2 = \frac{\pi^2}{4} - 2$ τ.μ.

Άρα $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$

Γ.3 $L = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$

όπου $\lim\limits_{x \to \pi} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to \pi} (-ημx + x) = -\cancel{ημπ}^{0} + \pi = \pi$

και $\lim\limits_{x \to \pi} (f(x) - x + \pi) = \lim\limits_{x \to \pi} (-ημx - x + \pi) = -\cancel{ημπ}^{0} - \pi + \pi = 0$

αφού η εφαπτομένη $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ βρίσκεται κάτω από τη C_f, εκτός από το σημείο επαφής, ισχύει

$$f(x) \geq x - \pi \ , \ \forall x \in [0,\pi] \ \text{ όπου}$$

η ισότητα ισχύει μόνο για x=π άρα για κάθε x κοντά στο π ισχύει

$f(x) > x - \pi \Leftrightarrow f(x) - x + \pi > 0$ άρα $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{1}{f(x) - x + \pi} = +\infty$

Επομένως $L = \lim\limits_{x \to \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim\limits_{x \to \pi} \left[(f(x) + x) \cdot \frac{1}{f(x) - x + \pi} \right] = \pi \cdot (+\infty) = +\infty$

Γ.4 $\forall x \in [1,e] \subseteq [0,\pi]$ ισχύει

$$f(x) > x - \pi \overset{:x>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$$

όπου η συνάρτηση $\frac{f(x)}{x}$ είναι συνεχής στο [1,e] ως πηλίκο των συνεχών $\left\langle \begin{matrix} f(x) \\ x(\text{πολυων.}) \end{matrix} \right.$

και η συνάρτηση $1-\frac{\pi}{x}$ δηλαδή $\frac{x-\pi}{x}$ είναι συνεχής στο [1,e] ως ρητή

Άρα από τη σχέση $\frac{f(x)}{x} > 1 - \frac{\pi}{x}$, $\forall x \in [1,e]$

Ισχύει ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e \left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \left[x - \pi \cdot \ell n|x|\right]_1^e \Rightarrow$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - \pi \cdot \ell ne - 1 + \pi \ell n1 \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4} = \left(x^4\right)^{1/3} & , x \in [-1,0) \\ e^x \cdot \eta\mu x & , x \in [0,\pi] \end{cases}$, πεδίο ορισμού $A = [-1,\pi]$

- Στο διάστημα [-1,0) είναι $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ άρα η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών x^4 (πολυωνυμική) και $\sqrt[3]{x}$ (ρίζα της συνεχούς x (πολυωνυμική))
- Στο διάστημα (0,π] είναι $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$ άρα η f είναι συνεχής ως γινόμενο των συνεχών e^x (εκθετική) και ημx (τριγωνομετρική).
- Στο x_o=0 είναι

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x^4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 1 \cdot 0 = 0 \end{matrix}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = e^0 \cdot \eta\mu 0 = 0$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$ ισχύει ότι η f είναι συνεχής και στο x_o=0, άρα η f είναι συνεχής στο [-1, π]

Παράγωγος της f

- Για κάθε $x \in [-1,0)$ η $f(x) = \left(x^4\right)^{1/3}$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot\left(x^4\right)^{\frac{1}{3}-1}\cdot\left(x^4\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(x^4\right)^{-2/3}\cdot 4x^3 = \frac{4x^3}{3\cdot(x^4)^{2/3}} = \frac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^4}^{\,2}} = \frac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^8}}$$

- Για κάθε $x \in (0,\pi)$ η $f(x) = e^x \cdot ημx$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^x \cdot ημx + e^x \cdot συνx = e^x \cdot (ημx + συνx)$$

- Στο x_o=0 είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{-(-x)} = -\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{(-x)^{\cancel{4}}}}{\cancel{\sqrt[3]{(-x)^3}}} = -\lim_{x\to 0^-}\sqrt[3]{-x} = 0$$

$\downarrow$

$x \to 0^-$

άρα $x < 0$

άρα $-x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-\cancel{f(0)}^{\,0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot ημx}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{ημx}{x}\right) = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{αφού } \lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 \\ \qquad\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ημx}{x} = 1 \end{array}\right)$$

Άρα **<u>δεν</u>** υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, άρα η f **<u>δεν</u>** είναι παραγωγίσιμη στο x=0, είναι όμως συνεχής σ' αυτό, άρα το **x=0** είναι κρίσιμο σημείο της f.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^8}} & , \ x \in [-1,0) \\ e^x\cdot(ημx + συνx) & , \ x \in (0,\pi] \end{cases}$$

- Για $x \in [-1,0)$ είναι $f'(x) = \dfrac{4x^3}{3\cdot\sqrt[3]{x^8}} < 0$

- Για $x \in (0,\pi]$ είναι $f'(x) = e^x(ημx + συνx)$, όπου $e^x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ημx + συνx = 0 \Leftrightarrow ημx = -συνx \Leftrightarrow$

$\dfrac{ημx}{συν} = -1 \Leftrightarrow$

$εφx = -1 \overset{\to\, x\in(0,\pi]}{\Leftrightarrow}$

$\mathbf{x = \dfrac{3\pi}{4}}$ το 2^o κρίσιμο σημείο της f

$$\left(\begin{array}{l} :συνx \neq 0 \\ \text{αφού αν} \\ συνx = 0 \text{ τότε} \\ \text{από } ημx + συνx = 0 \\ \text{είναι και } ημx = 0 \\ \text{Άτοπο αφού ισχύει} \\ ημ^2x + συν^2x = 1 \end{array}\right)$$

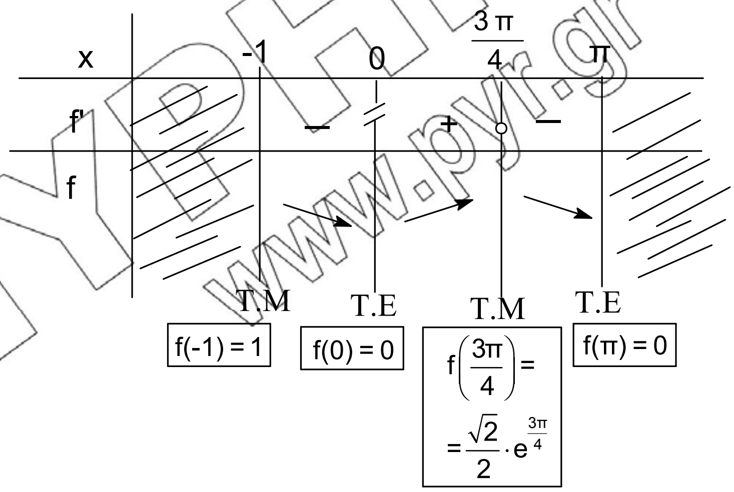
Δ.2 Αφού η συνάρτηση $f'(x) = e^x \cdot (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ είναι συνεχής στο διάστημα (0,π] ως πράξεις των συνεχών e^x (εκθετική) και ημx, συνx (τριγωνομετρικές) και έχει μοναδική ρίζα το $x = \dfrac{3\pi}{4}$, ισχύει ότι η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $\left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$. Επιπλέον

- αφού $\dfrac{\pi}{2} \in \left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$ και $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/2} \cdot \left(\eta\mu\dfrac{\pi}{2} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}\right) =$

  $= e^{\pi/2}(1+0) = e^{\pi/2} > 0$, ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \dfrac{3\pi}{4}\right)$

- αφού $\pi \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$ και $f'(\pi) = e^{\pi} \cdot (\eta\mu\pi + \sigma\upsilon\nu\pi) = e^{\pi} \cdot (0-1) = -e^{\pi} < 0$,

  ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \left(\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$



Η f είναι: γνήσια φθίνουσα στο διάστημα [-1, 0]

γνήσια αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

γνήσια φθίνουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Η f παρουσιάζει στη θέση x=–1 τοπικό μέγιστο το f(-1)=1, στη θέση x=0 τοπικό ελάχιστο το f(0)=0, στη θέση $x = \dfrac{3\pi}{4}$ τοπικό μέγιστο το $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$ και στη θέση x=π τοπικό ελάχιστο το f(π)=0.

Αφού η f είναι συνεχής στο [-1,π] η f παίρνει ελάχιστη τιμή m και μέγιστη τιμή Μ, όπου

$$m = \min\left\{f(-1), f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi)\right\} = 0$$

$$M = \max\left\{f(-1), f(0), f\left(\frac{3\pi}{4}\right), f(\pi)\right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{επειδή } \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}} > 1 \overset{\cdot\sqrt{2}}{\Leftrightarrow} e^{\frac{3\pi}{4}} > \sqrt{2} \Leftrightarrow \ell n e^{\frac{3\pi}{4}} > \ell n 2^{1/2} \Leftrightarrow \\ \dfrac{3\pi}{4} > \dfrac{1}{2}\ell n2 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow} \dfrac{3\pi}{2} > \ell n2 \quad \text{που} \quad \text{ισχύει} \\ \text{αφού } \dfrac{3\pi}{2} > 1 \text{ και } e > 2 \Rightarrow \ell ne > \ell n2 \Rightarrow 1 > \ell n2 \end{array}\right.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[m, M] = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ.3 Στο διάστημα [0,π] η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot ημx$ είναι συνεχής (από Δ1) και η συνάρτηση $h(x)=e^{5x}$ είναι συνεχής ως εκθετική

Θεωρώ τη συνάρτηση

$\varphi(x) = f(x) - h(x) = e^x \cdot ημx - e^{5x} = e^x \cdot (ημx - e^{4x})$, $x \in [0,\pi]$

Όπου $e^x > 0$, $\forall x \in [0,\pi]$

- Για κάθε $x \in [0,\pi]$ δηλαδή $0 \le x \le \pi \Rightarrow 0 \le ημx \le 1$ κ' $e^{4x} \ge 1$

  Άρα $ημx - e^{4x} \le 0$, άρα $\varphi(x) \le 0$, $\forall x \in [0,\pi]$

  Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_0^\pi |\varphi(x)|dx = -\int_0^\pi \varphi(x)dx = \int_0^\pi \left(e^{5x} - e^x \cdot ημx\right)dx =$$

$$= \int_0^\pi e^{5x}dx - \int_0^\pi e^x \cdot ημx dx = I_1 - I_2$$

- $I_1 = \int_0^\pi e^{5x}dx = \frac{1}{5}\left[e^{5x}\right]_0^\pi = \frac{1}{5}\left(e^{5\pi} - 1\right)$
- $I_2 = \int_0^\pi e^x \cdot ημx dx = \int_0^\pi \left(e^x\right)' \cdot ημx dx = \left[e^x \cdot ημx\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \cdot συνx dx =$

  $= \cancel{e^\pi \cdot ημπ}^{0} - \cancel{e^0 \cdot ημ0}^{0} - \int_0^\pi \left(e^x\right)' \cdot συνx dx =$

  $= -\left[e^x \cdot συνx\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x(-ημx)dx = -e^\pi \cdot συνπ + e^0 \cdot συν0 - I_2$

  Άρα $I_2 = e^\pi + 1 - I_2 \Leftrightarrow 2I_2 = e^\pi + 1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left(e^\pi + 1\right)$

  άρα $E = I_1 - I_2 = \frac{1}{5}\left(e^{5\pi} - 1\right) - \frac{e^\pi + 1}{2}$ τ.μ.

Δ.4 Εξίσωση $16\cdot e^{\frac{-3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{\frac{-3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\ ,\quad x\in[-1,\pi]\ \underset{\cdot e^{3\pi/4}}{\Leftrightarrow}$

$$16\cdot f(x)-(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\ \underset{:16}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}+\frac{1}{16}\cdot\left(4x-3\pi\right)^2\ \Leftrightarrow$$

$$f(x)=M+\frac{1}{16}\left(4x-3\pi\right)^2\ ,\ \text{όπου}\ \ M=f_{max}$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζα το $x_o=\frac{3\pi}{4}$ και μάλιστα μοναδική, αφού $\forall x\in\left[-1,\pi\right]$

με $x\neq\frac{3\pi}{4}$ είναι $\frac{1}{16}\left(4x-3\pi\right)^2>0\Rightarrow M+\frac{1}{16}\left(4x-3\pi\right)^2>M\ \Rightarrow$

$f(x)>M$, **Άτοπο** αφού ισχύει

$f(x)\leq M\ ,\ \forall x\in[-1,\pi]$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ
ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ