ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Σχολικό βιβλίο σελίδα 251
Α.2 Σχολικό βιβλίο σελίδα 273
Α.3 Σχολικό βιβλίο σελίδα 150
Α.4 **α** → Λ **β** → Σ **γ** → Σ **δ** → Σ **ε** → Λ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $2|z|^2+(z+z)i-4-2i=0$ (1)

Θέτω z=x+yi με $x,y\in R$ οπότε $|z|^2=x^2+y^2$ και $z+\bar{z}=2x$

$$(1)\Leftrightarrow 2(x^2+y^2)+2xi-4-2i=0\overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2+y^2+xi-2-i=0\Leftrightarrow (x^2+y^2-2)+(x-1)i=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2=0\\ \text{και}\\ x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-1=0\\ \\ x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm1\\ \\ x=1\end{cases}$$

Οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι: $z_1=1+i$, $z_2=1-i$

Β.2

$$\omega=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=3\left[\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right]^{39}=3\cdot\left(\frac{1+2i+i^2}{1+1}\right)^{39}=3\cdot\left(\frac{\cancel{2}i}{\cancel{2}}\right)^{39}=3\cdot i^{39}=3\cdot i^3=-3i$$

Β.3 $|u+w|=|4z_1-z_2-i|\Leftrightarrow$

$|u-3i|=|4(1+i)-(1-i)-i|\Leftrightarrow$

$|u-3i|=|3+4i|\Leftrightarrow|u-3i|=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow|u-(0+3i)|=5$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι ο κύκλος με κέντρο Κ(0,3) και ακτίνα R=5

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 $h(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in R$ παραγωγίσιμη στο R
αφού x , e^x+1 , $\ln(e^x+1)$ παραγωγίσιμες στο R
με $h'(x)=\left(x-\ln(e^x+1)\right)'=1-\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{1}{e^x+1}>0$, άρα $h\nearrow$ στο R

και h' παραγωγίσιμη στο R με $h''(x)=\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)'=-\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0$, $\forall x\in R$

αφού $e^x>0$, $(e^x+1)^2>0$, $\forall x\in R$. Άρα $h'\searrow$ στο R , άρα h κοίλη στο R.

Γ.2 $e^{h(2h'(x))}<\dfrac{e}{e+1}\Leftrightarrow \ln e^{h(2h'(x))}<\ln\left(\dfrac{e}{e+1}\right)\Leftrightarrow$

$h(2h'x))<\ln e-\ln(e+1)\Leftrightarrow h(2h'(x))<1-\ln(e+1)\Leftrightarrow$

$h(2h'(x))<h(1)\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)\overset{h'\searrow}{\Leftrightarrow}x>0$

Γ.3 $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln(e^x+1))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln(e^x+1)\right)=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$

Θέτω $u=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}u=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ ισχύει ότι η ευθεία y=0 (άξονας x΄x) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)=1$$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\lim\limits_{u\to1}\ln u=\ln1=0$
  $u=e^x+1$, $x\to-\infty\Rightarrow e^x\to0\Rightarrow u\to1$

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)\right]=0\cdot0=0$

$$\lim_{x\to-\infty}(h(x)-x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\cancel{x}-\ln\left(e^x+1\right)-\cancel{x}\right)=-\lim_{x\to-\infty}\ln\left(e^x+1\right)=0$$

Άρα η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$

Γ.4 $\varphi(x)=e^x(h(x)+\ln 2)$, $x\in R$ συνεχής στο R.

$$\varphi(x)\geq 0\Leftrightarrow e^x(h(x)+\ln 2)\geq 0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow} h(x)+\ln 2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$x-\ln(e^x+1)+\ln 2\geq 0\Leftrightarrow \ln e^x-\ln(e^x+1)+\ln 2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\geq \ln 1\overset{\ln x\nearrow}{\Leftrightarrow}\frac{2e^x}{e^x+1}\geq 1\overset{\cdot(e^x+1)>0}{\Leftrightarrow} 2e^x\geq e^x+1\Leftrightarrow e^x\geq 1\Leftrightarrow x\geq 0$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1|\varphi(x)|dx=\int_0^1 e^x\left(x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right)dx=$$

$$=\int_0^1 x\cdot e^x dx-\int_0^1 e^x\cdot\ln\left(e^x+1\right)dx+\int_0^1\ln 2\cdot e^x dx\underset{(3)}{\overset{(1),(2)}{=}}$$

$$=\cancel{1}-(e+1)\ln(e+1)+2\ln 2+e-\cancel{1}+(e-1)\cdot\ln 2=(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e \quad \text{τ.μ}$$

(1) • $\int_0^1 x\cdot e^x dx=\int_0^1 x(e^x)'dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x dx=\left[x\cdot e^x\right]_0^1-\left[e^x\right]_0^1=\cancel{e}-\cancel{e}+1=1$

(2) • $\int_0^1 e^x\cdot\ln(e^x+1)dx=\int_2^{e+1}\ln u\,du=\int_2^{e+1}(u)'\ln u\,du=[u\cdot\ln u]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}\cancel{u}\cdot\frac{1}{\cancel{u}}du=$

$$\boxed{\begin{array}{c}u=e^x+1\\ du=e^x dx\\ x=0\Rightarrow u=2\\ x=1\Rightarrow u=e+1\end{array}}$$

$$=[u\cdot\ln u]_2^{e+1}-\int_2^{e+1}1du$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-(e+1-2)$$

$$=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1$$

(3) • $\int_0^1\ln 2\cdot e^x dx=\ln 2\left[e^x\right]_0^1=(e-1)\cdot\ln 2$

ΘΕΜΑ Δ

Συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 1 & ,\ x=0 \end{cases}$, Πεδίο ορισμού A_f=R

Δ.1 ▪ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H.}}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}e^x=e^o=1$

▪ f(0)=1

Αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, ισχύει ότι η f είναι συνεχής στο x_o=0

▪ Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{D.L.H}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1-x)'}{(x^2)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}\in R$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0 με $f'(0)=\dfrac{1}{2}$

Για κάθε $x\in R^*$ είναι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο R*
(άρα και συνεχής στο R*) με

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)'\cdot x-(e^x-1)\cdot(x)'}{x^2}=\frac{x\cdot e^x-e^x+1}{x^2}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $K(x)=x\cdot e^x-e^x+1$, $x\in R$
Η K(x) είναι παραγωγίσιμη στο R (άρα και συνεχής στο R)
με $K'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x$, $x\in R$

Αφού $e^x>0$, $\forall x\in R$ ισχύουν τα εξής:
$K'(x)=0\Leftrightarrow x=0$
$K'(x)>0\Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
K'	$-$	$+$
K	$\searrow$	$\nearrow$

ΟΛ. ΕΛΑΧ. $\boxed{K(0)=0}$

Η K(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα η K(x) παρουσιάζει ΟΛΙΚΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΤΟ K(0)=0, άρα $K(x)\geq 0$, $\forall x\in R$

- $\forall x<0 \overset{K\searrow(-\infty,0)}{\Rightarrow} K(x)>K(0)\Rightarrow K(x)>0$
- $\forall x>0 \overset{K\nearrow(0,+\infty)}{\Rightarrow} K(x)>K(0)\Rightarrow K(x)>0$

Άρα $\forall x\in R^*$ ισχύει K(x)>0

Άρα $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{K(x)}{x^2}, & x\in R^*\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$, άρα $f'(x)>0 \quad \forall x\in R$

Επομένως f $\nearrow$ στο R.

Δ.2 Δίνεται ότι η f είναι κυρτή, άρα f΄ $\nearrow$ στο R.

α) Εξίσωση $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0 \quad (1)$

Προφανής λύση της εξίσωσης είναι το x=0, αφού $2f'(0)=2\cdot\frac{1}{2}=1$

κι αφού f συνεχής στο R ισχύει $\int_1^{2f'(0)} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0$

- $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>e^o \Leftrightarrow x>0$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
$e^x - 1$	$-$	$+$
x	$-$	$+$
$\frac{e^x-1}{x}$	$+$	$+$

Άρα $\forall x\in R^*$ είναι $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}>0$

κι αφού f(0)=1, ισχύει f(x)>0, $\forall x\in R$

- Για $x<0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(0) \Rightarrow f'(x)<\frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x)<1$

  άρα ορίζεται το διάστημα $[2f'(x),1]$ όπου
  $\forall u \in [2f'(x),1]$ είναι f(u) συνεχής και f(u)>0

  άρα $\int_{2f'(x)}^{1} f(u)du>0 \Leftrightarrow \int_{1}^{2f'(x)} f(u)du<0$

  άρα η εξίσωση (1) **<u>δεν</u>** έχει πραγματική ρίζα για $x\in(-\infty,0)$

- Για $x>0 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x)>f'(0) \Rightarrow f'(x)>\frac{1}{2} \Rightarrow 2f'(x)>1$

  Άρα ορίζεται το διάστημα $[1,2f'(x)]$ όπου $\forall u\in[1,2f'(x)]$ είναι f(u) συνεχής και f(u)>0 άρα ισχύει
  $\int_{1}^{2f'(x)} f(u)du>0$, άρα η (1) **<u>δεν</u>** έχει πραγματική ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$

  Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση τη x=0

β) Το υλικό σημείο M(x(t),y(t)) ξεκινά τη στιγμή t=0 από το σημείο $A(x_o,f(x_o))$ της C_f, όπου $x_o<0$ και κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της καμπύλης y=f(x), $x\ge x_o$ άρα ισχύει $y(t)=f(x(t))$ κι αφού x(t), f(t), y(t) είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, είναι

$y'(t)=f'(x(t))\cdot x'(t)$, όπου δίνεται ότι $x'(t)>0$, $\forall t\ge 0$

Αν τη στιγμή t_o ισχύει ότι $x'(t_o)=2y'(t_o)\Leftrightarrow y'(t_o)=\frac{1}{2}x'(t_o)$ τότε έχουμε

$$y'(t_o)=f'(x(t_o))\cdot x'(t_o)\Leftrightarrow \frac{1}{2}x'(t_o)=f'(x(t_o))\cdot x'(t_o) \overset{x'(t_o)>0}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x(t_o))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f'(x(t_o)=f'(0) \overset{f'\ 1\text{–}1\ \text{αφού}\ f'\nearrow}{\Leftrightarrow}$$

$x(t_o)=0$ και τότε $y(t_o)=f(x(t_o))=f(0)=1$

Άρα το ζητούμενο σημείο της C_f είναι το σημείο $(x(t_o)\ ,\ y(t_o))=(0,1)$.

Δ.3 Συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ και

$$g(x)=(x\cdot f(x)+1-e)^2\cdot(x-2)^2=\left(\cancel{x}\cdot\frac{e^x-1}{\cancel{x}}+1-e\right)^2\cdot(x-2)^2=$$

$$=(e^x-e)^2\cdot(x-2)^2=\left((e^x-e)\cdot(x-2)\right)^2$$

Η g είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και συνεχής, με

$$g'(x)=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot\left[e^x(x-2)+e^x-e\right]=$$
$$=2\cdot(e^x-e)\cdot(x-2)\cdot(x\cdot e^x-e^x-e)$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=x\cdot e^x-e^x-e$, $x\in(0,+\infty)$
Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και συνεχής, με
$h'(x)=e^x+x\cdot e^x-e^x=x\cdot e^x>0$, $x\in(0,+\infty)$ άρα h ↗

Στο διάστημα [1,2] η h είναι συνεχής και

$$\left.\begin{aligned}h(1)&=\cancel{e}-e-\cancel{e}=-e<0\\ h(2)&=2e^2-e^2-e=e^2-e>0\end{aligned}\right\}h(1)\cdot h(2)<0$$

Άρα από Θ. Bolzano η εξίσωση h(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα $x_o\in(1,2)$, η οποία είναι η μοναδική ρίζα της h σε όλο το $(0,+\infty)$, αφού h ↗

- Για $0<x<x_o\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)<h(x_o)\Rightarrow h(x)<0$
- Για $x>x_o\overset{h\nearrow}{\Rightarrow}h(x)>h(x_o)\Rightarrow h(x)>0$
- $e^x-e>0\Leftrightarrow e^x>e\Leftrightarrow e^x>e^1\Leftrightarrow x>1$
- $x-2>0\Leftrightarrow x>2$

x	0		1		x_o		2		$+\infty$
$e^x - e$	‖	−	0	+		+		+	
$x-2$	‖	−		−		−	0	+	
$h(x)$	‖	−		−	0	+		+	
$g'(x)$	‖	−	0	+	0	−	0	+	
$g(x)$	‖	↘		↗		↘		↗	
			Τ.Ε.		Τ.Μ.		Τ.Ε.		

Η g είναι: γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$
γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,x_o]$
γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_o,2]$
γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2,+\infty)$

Άρα η g παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό ελάχιστο, στη θέση $x=x_o$ τοπικό μέγιστο και στη θέση $x=2$ τοπικό ελάχιστο

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

ΜΑΡΚΑΤΟΣ ΔΙΟΝΥΣΗΣ
ΜΑΣΤΟΡΑΚΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ